The Canadian Mathematical Society | La Société mathématique du Canada

La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

présente le

Défi ouvert canadien de mathématiques

le mercredi 22 novembre 2006

Avec la contribution de: Financière Sun Life

Durée: 2 heures et demie

L'usage de la calculatrice n'est pas permis.

Attendre le signal avant d'ouvrir ce cahier.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A

Cette partie est composée de 8 questions de 5 points chacune. On peut obtenir les cinq points d'une question en écrivant la réponse correcte dans l'espace prévu à cet effet. Si la réponse est erronée, **tout travail présenté dans l'espace approprié du cahier-réponse sera évalué** et pourra mériter une partie des points.

PARTIE B

Cette partie est composée de 4 questions de 10 points chacune. Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si l'espace du cahier est rempli, la surveillante ou le surveillant fournira du papier ligné. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Soyez prudent en inscrivant votre nom et le nom de votre école sur chaque feuille insérée.
Des points sont accordés pour des solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

REMARQUES

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.
Une liste sera publiée, sur le site Web de la SMC et celui du CEMI, portant le nom des candidats qui ont obtenu le plus grand nombre de points.

Défi ouvert canadien de mathématiques

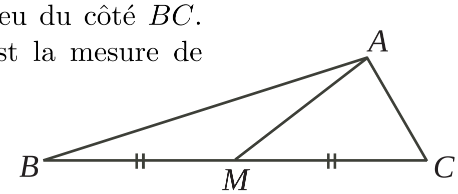
Remarques :	1.	Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
	2.	Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
	3.	Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.
	4.	L'usage de la calculatrice **n'est pas** permis.

PARTIE A

1. Quelle est la valeur de $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)$?

2. Soit $f(2x+1)=(x-12)(x+13)$. Quelle est la valeur de $f(31)$?

3. Dans le triangle ABC ci-contre, M est le milieu du côté BC. Si $\angle ABM = 15°$ et $\angle AMC = 30°$, quelle est la mesure de l'angle BCA ?



4. Déterminer toutes les solutions (x,y) du système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{4}{x}+\frac{5}{y^2} &= 12 \\ \frac{3}{x}+\frac{7}{y^2} &= 22 \end{aligned}$$

5. Dans le triangle ABC, on a $BC=4$, $AB=x$, $AC=x+2$ et $\cos(\angle BAC)=\dfrac{x+8}{2x+4}$. Déterminer toutes les valeurs possibles de x.

6. Déterminer le nombre d'entiers n qui vérifient *toutes les trois* conditions suivantes :
   - chaque chiffre de n est un 1 ou un 0,
   - n est divisible par 6 et
   - $0 < n < 10^7$.

7. Soit n et D deux entiers de manière que n soit strictement positif et $0 \le D \le 9$. Déterminer la valeur de n, sachant que $\dfrac{n}{810} = 0{,}\overline{9D5} = 0{,}9D59D59D5\ldots$

8. Si on lance une pièce de monnaie 10 fois de suite, quelle est la probabilité pour qu'il y ait, au moins une fois, 2 faces consécutives ou plus ?

PARTIE B

1. Piotr place des nombres dans un tableau 3 par 3, tout en respectant la règle suivante, appelée « Principe de Piotr » :

   > Si trois nombres paraissent dans trois cases consécutives à l'horizontale, à la verticale ou en diagonale, le nombre du milieu doit être égal à la moyenne des deux autres.

   (a) Utiliser le Principe de Piotr pour remplir le tableau ci-contre. (Remplir les cases vides du tableau dans le cahier-réponse.)

3		19
8		

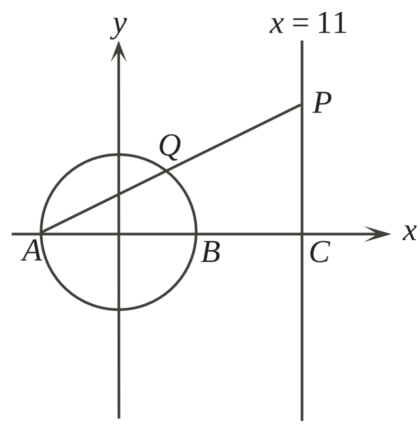
   (b) Déterminer la somme des neuf nombres du tableau ci-contre lorsqu'il est rempli selon le Principe de Piotr. Justifier les étapes de son raisonnement.

x		
5		23

   (c) Déterminer la valeur de x et de y lorsque le tableau ci-contre est rempli selon le Principe de Piotr. Justifier les étapes de son raisonnement.

x	7	
9		y
		20

2. Dans la figure ci-contre, le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$ coupe l'axe des abscisses aux points A et B. La droite d'équation $x = 11$ coupe l'axe des abscisses au point C. Le point P bouge le long de la droite $x = 11$ au-dessus de l'axe des abscisses et le segment AP coupe le cercle au point Q.

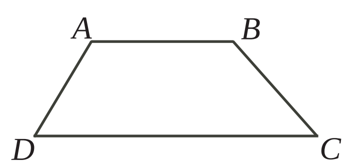


   (a) Déterminer les coordonnées de P lorsque le triangle AQB admet une aire maximale. Justifier sa réponse.

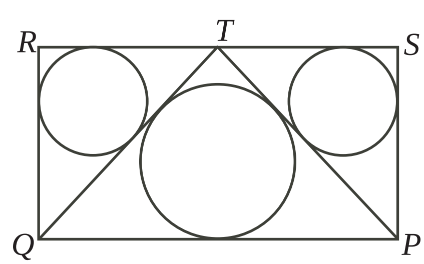
   (b) Déterminer les coordonnées de P lorsque Q est le milieu du segment AP. Justifier sa réponse.

   (c) Déterminer les coordonnées de P lorsque l'aire du triangle AQB est égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire du triangle APC. Justifier sa réponse.

3. (a) Dans la figure ci-contre, les côtés parallèles AB et DC du trapèze $ABCD$ ont une longueur respective de 10 et de 20 et les côtés AD et BC ont une longueur respective de 6 et de 8. Déterminer l'aire du trapèze $ABCD$.



   (b) Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un rectangle et T est le milieu du côté RS. Les cercles inscrits dans les triangles PTS et RTQ ont chacun un rayon de 3. Le cercle inscrit dans le triangle QPT a un rayon de 4. Déterminer les dimensions du rectangle $PQRS$.



4. (a) Déterminer la fraction $\dfrac{p}{q}$ qui est le plus près de $\frac{3}{7}$ sans y être égale, p et q étant des entiers strictement positifs et $q < 100$. Justifier les étapes de son raisonnement.

   (b) La *somme naïve* de deux nombres rationnels, $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$, est le nombre $\dfrac{a+c}{b+d}$. (Un *nombre rationnel* est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers et dont le dénominateur n'est pas égal à 0.) À l'étape 0, on écrit les nombres rationnels $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$. Pour atteindre l'étape suivante, on considère chaque paire de fractions consécutives de l'étape précédente et on insère entre elles la somme naïve de ces deux fractions. Les premières étapes de ce processus sont indiquées ci-dessous :

ÉTAPE 0 :	$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{1}$
ÉTAPE 1 :	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{1}$
ÉTAPE 2 :	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{1}$
ÉTAPE 3 :	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$

   Démontrer que :

   (i) aucun nombre rationnel ne sera inséré plus d'une fois ;

   (ii) chaque fraction qui est insérée est irréductible ;

   (iii) chaque nombre rationnel entre 0 et 1 sera inséré à une étape quelconque.