The Canadian Mathematical Society   La Société mathématique du Canada

La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

présente le

Défi ouvert canadien de mathématiques

le mercredi 23 novembre 2005

Durée: 2 heures et demie

L'usage de la calculatrice n'est pas permis.

Attendre le signal avant d'ouvrir ce cahier.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A

Cette partie est composée de 8 questions de 5 points chacune. On peut obtenir les cinq points d'une question en écrivant la réponse correcte dans l'espace prévu à cet effet. Si la réponse est erronée, **tout travail présenté dans l'espace approprié du cahier-réponse sera évalué** et pourra mériter une partie des points.

PARTIE B

Cette partie est composée de 4 questions de 10 points chacune. Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si l'espace du cahier est rempli, la surveillante ou le surveillant fournira du papier ligné. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Soyez prudent d'avoir mis votre nom et le nom de votre école sur chaque feuille insérée.
Des points sont accordés pour des solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

REMARQUE : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Défi ouvert canadien de mathématiques

Remarques :	1.	Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
	2.	Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
	3.	Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.
	4.	L'usage de la calculatrice **n'est pas** permis.

PARTIE A

1. Déterminer la valeur de l'expression $10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.

2. Une fourmi est située au point $(1,9)$ du plan cartésien. Elle se rend au point $(2,10)$, puis au point $(3,11)$, et ainsi de suite. Elle continue de la sorte jusqu'à ce qu'elle arrive à un point dont l'ordonnée est le double de l'abscisse. Quelles sont les coordonnées de ce point ?

3. Si $ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + x - 2)(x - 4) - (x + 2)(x^2 - 5x + 4)$ pour toutes les valeurs de x, quelle est la valeur de l'expression $a + b + c + d$?

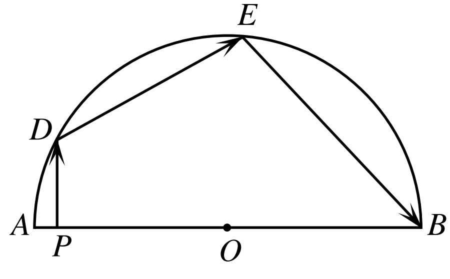
4. Une fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible si p et q n'admettent aucun diviseur commun supérieur à 1. Parmi les 71 fractions $\dfrac{1}{72}, \dfrac{2}{72}, \ldots, \dfrac{70}{72}, \dfrac{71}{72}$, combien sont irréductibles ?

5. Un immeuble commercial de 50 étages a vingt-cinq étages peints en noir et vingt-cinq étages dorés. Si on additionne le nombre d'étages dorés de la moitié supérieure de l'immeuble et le nombre d'étages noirs de la moitié inférieure de l'immeuble, on obtient une somme de 28. Combien y a-t-il d'étages dorés dans la moitié supérieure de l'immeuble ?

6. On a assigné une valeur à chaque rangée et une valeur à chaque colonne du tableau ci-contre. Chaque case du tableau contient un nombre qui est la somme des valeurs de sa rangée et de sa colonne. Par exemple, le « 8 » est la somme des valeurs de la 3^e rangée et de la 4^e colonne. Déterminer la valeur de x et celle de y.

3	0	5	6	-2
-2	-5	0	1	y
5	2	x	8	0
0	-3	2	3	-5
-4	-7	-2	-1	-9

7. Le demi-cercle ci-dessous a pour centre O et pour diamètre AB. Un rayon de lumière part du point P et se dirige dans une direction perpendiculaire à AB. Arrivé au point D sur le demi-cercle, il est réfléchi de manière que $\angle PDO = \angle EDO$. (En d'autres mots, au point D, l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.) Au point E sur le demi-cercle, le rayon DE est réfléchi de la même manière, pour arriver au point B. Déterminer la mesure de l'angle DOP.



8. Le nombre 18 *n'est pas* égal à la somme de 2 entiers consécutifs positifs, mais il *est* égal à la somme d'entiers consécutifs positifs d'au moins deux façons, soit $5 + 6 + 7 = 18$ et $3 + 4 + 5 + 6 = 18$. Déterminer un entier positif inférieur à 400 qui *n'est pas* égal à la somme de 11 entiers consécutifs strictement positifs, mais qui *est* égal à la somme d'entiers consécutifs strictement positifs d'au moins 11 façons différentes.

PARTIE B

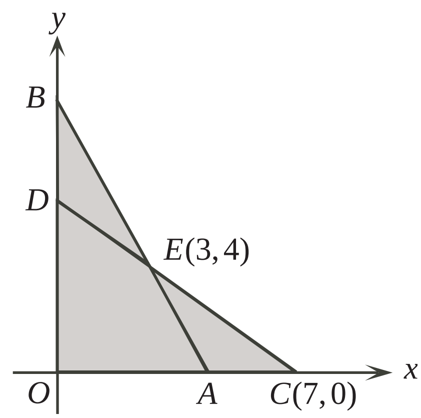
1. Une droite de pente -3 coupe la partie positive de l'axe des abscisses en A et la partie positive de l'axe des ordonnées en B. Une deuxième droite coupe l'axe des abscisses en $C(7, 0)$ et l'axe des ordonnées en D. Les deux droites se coupent en $E(3, 4)$.

   (a) Déterminer la pente de la droite qui passe par les points C et E.

   (b) Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points C et E ; déterminer aussi les coordonnées du point D.

   (c) Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points A et B ; déterminer aussi les coordonnées du point B.

   (d) Déterminer l'aire de la région ombrée.



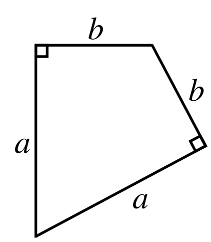
2. (a) Déterminer tous les couples (a, b) pour lesquels :

$$\begin{aligned} a - b &= 1 \\ 2a^2 + ab - 3b^2 &= 22 \end{aligned}$$

   (b) Déterminer tous les triplets (x, y, z) pour lesquels :

$$\begin{aligned} x^2 - yz + xy + zx &= 82 \\ y^2 - zx + xy + yz &= -18 \\ z^2 - xy + zx + yz &= 18 \end{aligned}$$

3. On considère quatre tuiles identiques à la tuile ci-contre, où $a > b > 0$. Les tuiles sont placées, sans chevauchement, de manière à former un carré au milieu duquel il y a un trou de forme carrée.

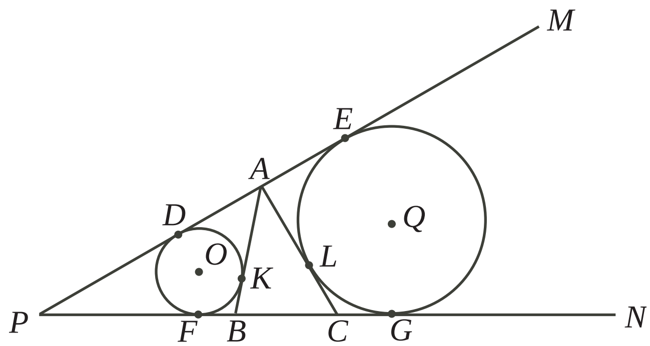


   (a) Si le carré extérieur a une aire de $(a + b)^2$, démontrer que le carré intérieur a une aire de $(a - b)^2$.

   (b) Déterminer la plus petite valeur entière de N pour laquelle il existe des nombres premiers a et b, de manière que le rapport de l'aire du carré intérieur à l'aire du carré extérieur soit égal à $1 : N$.

   (c) Tout en justifiant ses étapes, déterminer tous les entiers positifs N pour lesquels il existe des entiers impairs, a et b, $a > b > 0$, de manière que le rapport de l'aire du carré intérieur à l'aire du carré extérieur soit égal à $1 : N$.

4. La base du triangle ABC est située sur le segment PN et son sommet A est situé sur le segment PM. Deux cercles, qui ont pour centre respectif O et Q et pour rayon respectif r_1 et r_2, sont tangents au triangle ABC de façon externe et tangents aux segments PM et PN.



(a) Démontrer que la droite qui passe par les points K et L coupe le périmètre du triangle ABC en deux parties égales.

(b) Soit T le point de contact du côté BC et du cercle inscrit dans le triangle ABC. Démontrer que $(TC)(r_1) + (TB)(r_2)$ est égal à l'aire du triangle ABC.