A1 Trouvez l'entier positif n qui satisfait l'équation suivante:

$$\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^8} = \frac{n}{2^{10}}.$$

Solution

En additionnant les termes du côté gauche de l'équation en les mettant sur le même dénominateur (2^{10}) on trouve

$$\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^{10}} + \frac{2}{2^{10}} + \frac{2^2}{2^{10}} = \frac{1+2+4}{2^{10}} = \frac{7}{2^{10}}.$$

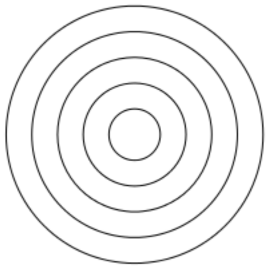
Ainsi, $n = 7$.

A2 Trouvez l'entier *positif* k pour lequel la parabole d'équation $y = x^2 - 6$ passe par le point (k, k).

Solution

Si la courbe passe par le point (k, k), on peut substituer $x = k, y = k$ dans l'équation pour trouver $k^2 - k - 6 = 0$. Cettte expression se factorise comme $(k - 3)(k + 2) = 0$, alors $k = 3$ ou $k = -2$. Comme nous cherchons une valeur positive pour k, on choisit $k = 3$.

A3 Dans la figure suivante, les cercles ont un rayon de 1, 2, 3, 4, et 5. L'aire totale des points contenus dans un nombre *impair* de cercles est $m\pi$ où m est un nombre positif. Quelle est la valeur de m?



Solution

Un point est dans un nombre impair de cercles s'il est dans le cercle central, l'anneau formé par le troisième cercle ou l'anneau extérieur. L'aire du cercle central est π. Le troisième anneau est constitué des points du cercle de rayon 3 qui ne sont pas dans le cercle de rayon 2. L'aire du troisième anneau est donc $3^2\pi - 2^2\pi = 5\pi$. L'anneau extérieur est formé des points du cercle de rayon 5 qui ne sont pas dans le cercle de rayon 4. L'aire de l'anneau extérieur est donc $5^2\pi - 4^2\pi = 9\pi$. On peut ainsi trouver l'aire totale qui est $\pi + 5\pi + 9\pi = 15\pi$, donc $m = 15$.

A4 Un nombre entier positif est dit bi-chiffré s'il s'écrit avec deux chiffres différents et que chacun est utilisé deux fois. Par exemple, 1331 est bi-chiffré tandis que 1113, 1111, 1333 et 303 ne le sont pas. Trouvez le nombre total d'entiers positifs bi-chiffrés.

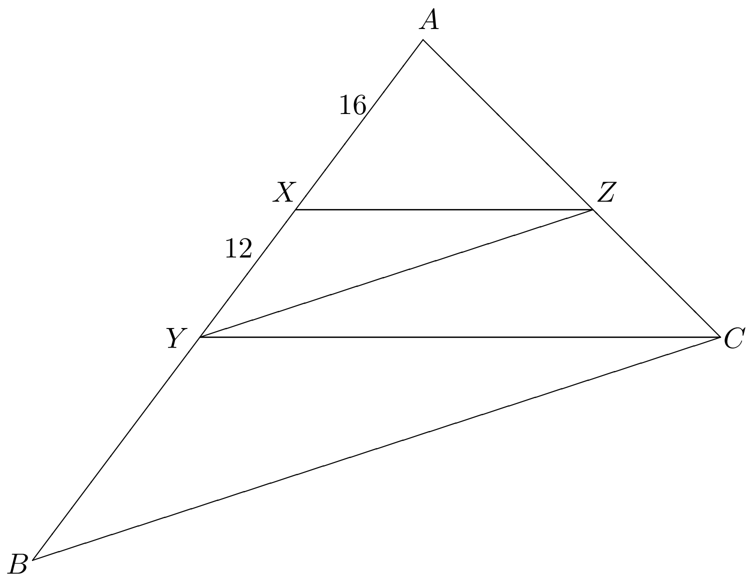
Solution 1

Il y a neuf choix pour la valeur du chiffre de gauche (Celui-ci ne peut pas être 0) et trois choix pour la deuxième occurrence de ce chiffre. Il y a ensuite neuf choix pour le chiffre qui complète l'écriture du nombre bi-chiffré. Ainsi, la réponse est $b = 9 \times 3 \times 9 = 243$.

Solution 2

On considèere deux cas. Soit 0 est impliqué dans l'écriture, soit il ne l'est pas. Pour les nombres bi-chiffrés qui ne comptent pas de zéros, il y a $\binom{9}{2} = 36$ façons de choisir deux chiffres non nuls. Il y a ensuite $\frac{4!}{(2!)^2} = 6$ façons d'arranger ces chiffres pour avoir un nombre bi-chiffré, pour un total de 216 nombres. Si 0 fait partie de l'écriture, il ne peut pas être le premier chiffre de l'écriture. Il y a $\binom{9}{1} = 9$ façons de choisir le deuxième chiffre. Le premier chiffre de l'écriture doit être celui qui n'est pas nul et il y a 3 autres positions possibles pour sa deuxième occurrence. Il y a donc 27 nombres bi-chiffrés de cette forme. Alors $b = 216 + 27 = 243$.

B1 Étant donné un triangle ABC, X et Y des points sur le côté AB tel que X est plus près de A que Y et Z un point sur le côté AC tel que XZ est parallèle à YC et YZ est parallèle à BC. Si $AX = 16$ et $XY = 12$, trouvez la longueur du segment YB.



Solution

Les triangles AXZ et AYC sont semblables, donc $AZ : AX = ZC : XY$ et donc $AZ/ZC = 4/3$. De plus, les triangles AYZ et ABC sont semblables et alors $AZ : ZC = 28 : YB$. En combinant ces deux résultats, on trouve $4/3 = \frac{28}{YB}$ donc $YB = 21$.

B2 Il y a un unique triplet d'entiers strictement positifs (a, b, c) tel que $a \leq b \leq c$ et

$$\frac{25}{84} = \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc}.$$

Trouvez la valeur de $a + b + c$.

Solution:

Remarquons que $\frac{1}{4} < \frac{25}{84} < \frac{1}{3}$. Ainsi, $a \geq 4$. Mais si $a \geq 5$, alors $b, c \geq 5$. Donc

$$\frac{25}{84} = \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} = \frac{5^2+5+1}{5^3} = \frac{31}{125} < \frac{1}{4} < \frac{25}{84},$$

ce qui est une contradiction. On en déduit que $a \not\geq 5$, donc $a = 4$.

En substituant dans l'équation, on trouve

$$\frac{25}{84} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4bc}.$$

On multiplie chaque côté de l'équation par 4 et on réarrange pour trouver

$$\frac{4}{21} = \frac{1}{b} + \frac{1}{bc}. \tag{1}$$

On remarque que $\frac{1}{6} < \frac{4}{21} < \frac{1}{5}$. Ainsi $b \geq 6$. Si $b \geq 7$, alors $c \geq 7$. Donc

$$\frac{4}{21} = \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} = \frac{7+1}{7^2} = \frac{8}{49} < \frac{1}{6} < \frac{4}{21},$$

ce qui est une contradiction. On trouve donc que $b \not\geq 7$ et ainsi $b = 6$. En substituant le résultat dans (1) on trouve

$$\frac{4}{21} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6c}.$$

On multiplie chaque côté de l'équation par 6 et on réarrange pour trouver

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{c}.$$

Ainsi, $c = 7$.

On a finalement que $(a, b, c) = (4, 6, 7)$, ce qui implique que $a + b + c = 17$.

B3 Les équipes A et B jouent au soccer jusqu'à ce que 29 buts soient comptés par une équipe. Pendant la partie, le pointage est affiché sur un tableau à l'aide de deux nombres: le nombre de buts comptés par l'équipe A et le nombre de buts comptés par l'équipe B. Un adepte de mathématiques et de soccer a remarqué qu'à plus d'une reprise dans la partie, la somme des chiffres écrits sur le tableau était de 10 (un score de 12 : 7 serait un exemple d'une telle somme). À combien de reprises au maximum cette situation a-t-elle pu survenir dans la partie ?

Solution 1

Lorsque la somme de tous les chiffres sur le tableau est 10, la somme des scores doit être 1 de plus qu'un multiple de 9. La plus grande somme possible de scores est $29 + 28 = 57$. Les nombres inférieurs à 57 qui sont un de plus qu'un multiple de 9 sont 1, 10, 19, 28, 37, 46, et 55. Si la somme des scores est 1, la somme des chiffres est 1, pas 10. Si la somme des scores est 55, le score est 26 à 29 ou 27 à 28 qui ont tous deux une somme des chiffres égale à 19. Ainsi, ceci ne peut arriver plus de 5 fois.

On remarque que les scores $(5, 5), (5, 14), (14, 14), (23, 14), (23, 23)$ ont tous une sommes des chiffres égale à 10 et qu'on peut tous les atteindre dans la même partie. Ainsi, la réponse recherchée est 5.

Solution 2

On note par (a_1a_2, b_1b_2) le score inscrit sur le tableau où a_1, a_2, b_1, b_2 sont des chiffres (a_1 et b_1 peuvent être 0), et a_1a_2, b_1b_2 sont le nombre de buts compté par chacune des équipes. On dira qu'un score est *bon* si $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = 10$.

Lemme: Supposons que les scores (x, y) et (z, t) surviennent durant la partie. Alors au plus un de $x > z$ et $y < t$ peut être vrai.

Démonstration: Supposons que $x > z$. Alors la première équipe a compté x après avoir compté z bute. Le score (x, y) est donc survenu plus tôt dans la partie que le score (z, t). Ainsi $y \geq t$ et le résultat suit.

On montre maintenant qu'il ne peut pas y avoir deux bons scores de la forme (a_1a_2, a_1b_2) ou $(a_1a'_2, a_1b'_2)$ qui surviennent durant la partie. Supposons que ces scores soient survenus; alors $a_2 + b_2 = a'_2 + b'_2$. SPDG $a_2 > a'_2$. Alors $b_2 < b'_2$; donc $a_1a_2 > a_1a'_2$; $a_1b_2 < a_1b'_2$, ce qui est impossible par le Lemme.

On affirme maintenant que si $a_1 > b_1$, alors au plus un des bons scores (a_1a_2, b_1b_2), $(b_1a'_2, a_1b'_2)$ peut survenir durant la partie. Ce ci découle directement du Lemme car $a_1a_2 > b_1a'_2$; $a_1b'_2 > b_1b_2$.

Puisque la partie se termine lorsqu'un équipe a compté 29 buts, le chiffre des dizaines du score de chaque équipe est 0, 1, or 2. Par notre affirmation, il y a au plus 9 possibilités de bons scores: $(0a, 0b)$, $(0a, 1b)$, $(0a, 2b)$, $(1a, 0b)$, $(1a, 1b)$, $(1a, 2b)$, $(2a, 0b)$, $(2a, 1b)$, $(2a, 2b)$ pour certains chiffres a, b (possiblement différents dans chaque cas). Par la deuxième affirmation, $(0a, 1b)$ et $(1a, 0b)$; $(0a, 2b)$ et $(2a, 0b)$; $(1a, 2b)$ et $(2a, 1b)$ ne peuvent survenir, eliminant donc 3 possibilités. De plus, si $(0a, 2b)$ ou $(2a, 0b)$ surviennent alors $(1a, 1b)$ ne peut pas survenir et vice versa (puisque si SPDG $(0a, 2b)$ survient, avait au moins 20 points lorsque la première en avait 10). Ceci élimine une possibilité supplémentaire.

Ainsi, au plus 9 - 3 - 1 = 5 bons scores sont survenus. Il faut maintenant donner un exemple pour s'assurer qu'il est bien possible d'en avoir 5 : $(3, 7), (8, 11), (14, 14), (16, 21), (23, 23)$.

B4 Soit a la plus grande valeur réelle de x pour laquelle $x^3 - 8x^2 - 2x + 3 = 0$. Trouvez l'entier le plus près de a^2.

Solution 1

Comme l'équation est de degré 3, il y a au plus 3 valeurs réelles de x pour lesquelles l'équation tient.

Soit $f(x) = x^3 - 8x^2 - 2x + 3$, et b, c les deux autres racines de $f(x)$.

On remarque que

$$f(-1) = (-1)^3 - 8(-1)^2 - 2(-1) + 3 = -4 < 0$$

et

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-1}{2} + 3 = \frac{-1}{8} - 2 + 1 + 3 > 0.$$

Ainsi, il y a une racine entre -1 et $-1/2$.

De la même façon,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{8} - 2 - 1 + 3 = \frac{1}{8} > 0$$

and

$$f(1) = 1 - 8 - 2 + 3 = -6 < 0.$$

Il y a donc une racine entre $1/2$ et 1.

Supposons que $-1 < b < -1/2$ et $1/2 < c < 1$.

On considère la quantité $a^2+b^2+c^2$. On peut factoriser $x^3-8x^2-2x+3 = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$. Ainsi, $a+b+c = 8$ et $ab+bc+ca = -2$. Alors $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 8^2 - 2 \cdot (-2) = 68$.

On considère maintenant la quantité b^2+c^2. Puisque $b < -1/2$ et $c > 1/2$, $b^2+c^2 > 1/2$. On cherche une borne supérieure pour b^2+c^2. Remarquons que

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} - 4 - \frac{2}{\sqrt{2}} + 3 = \frac{-3}{2\sqrt{2}} - 1 < 0.$$

Puisque $f(1/2) > 0$, $1/2 < c < 1/\sqrt{2}$.

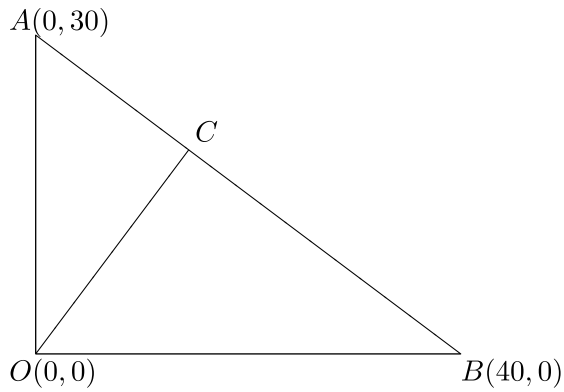
Ainsi, $b^2+c^2 < 1 + 1/2 = 3/2$. Comme $1/2 < b^2+c^2 < 3/2$ et $a^2+b^2+c^2 = 68$, $66.5 < a^2 < 67.5$. L'entier le plus près de a^2 est donc 67.

Solution 2

Comme dans la première solution, on vérifie qu'il y a deux racines entre -1 et 1. Comme l'équation est du troisième degré, il y a au plus trois racines distinctes.

On réécrit l'équation comme $x^2(x-8) = 2x - 3$, qui se simplifie à $x^2 = 2 + \frac{13}{x-8}$. En prenant $x = 8.2$, on trouve $8.2^2 = 67.24$ du côté gauche et $2 + \frac{13}{.2} = 67$ du côté droit. Lorsqu'on fait varier x, de 8.2 à 8.1, le côté gauche de l'équation passe de 67.24 à 65.61 et le côté droit passe de 67 à 132. Comme les deux fonctions sont continues, il y a un point entre $8,1$ et $8,2$ pour lequel les deux fonctions coïncident et valent entre 67 et67.24. Ainsi, l'entier le plus près de la valeur de x^2 est 67.

C1 Dans l'image suivante, $\triangle AOB$ est un triangle avec coordonnées $O = (0, 0)$, $A = (0, 30)$ et $B = (40, 0)$. Soit C le point sur le segment AB pour lequel OC est perpendiculaire à AB.



(a) Trouvez la longueur de OC.

(b) Trouvez les coordonnées du point C.

(c) Soit M le centre du cercle passant par O, A et B. Trouvez la longueur de CM.

Solution 1

(a) Par le théorème de Pythagore, la longueur de AB est $\sqrt{30^2 + 40^2} = 50$. En calculant l'aire du triangle avec $AB \times CO/2$ et $AO \times OB/2$ on trouve que $50 \times OC = 1200$, et $OC = 24$.

(b) Puisque OC est perpendiculaire à AB, l'angle ACO est droit. Ainsi, le triangle ACO est semblable à AOB, donc $AC : AO = AO : AB$ et $AC = 18$. Le point C est à une fraction de $\frac{18}{50}$ sur le chemin qui relie A à B. Ces coordonnées sont donc $\left(\frac{18}{50} \times 40, \frac{32}{50} \times 30\right) = \left(\frac{72}{5}, \frac{96}{5}\right)$

(c) Comme l'angle AOB est droit, AB est un diamètre du cercle passant par O, A, et B. Donc M doit être un point milieu de la droite AB. On a déjà calculé que $AC = 18$, et nous savons que $AM = AB/2 = 25$, alors $CM = AM - AC = 25 - 18 = 7$.

Solution 2

(a) Par le théorème de Pythagore, la longueur de AB est $\sqrt{30^2 + 40^2} = 50$. Puisque OC est perpendiculaire à AB, l'angle ACO est droit et donc $\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{OB}$, alors $OC = \frac{AO \times OB}{AB} = \frac{1200}{50} = 24$.

(b) L'équation de la droite passant par A et B a la forme $\frac{x}{y-30} = \frac{40-0}{0-30}$, qu'on peut réécrire comme $y = -\frac{3}{4}x + 30$. La droite passant par O et C est perpendiculaire à $y = -\frac{3}{4}x + 30$, elle a donc une pente de $\frac{4}{3}$ et son équation est $y = \frac{4}{3}x$. Ces droites se croisent au point $\left(\frac{72}{5}, \frac{96}{5}\right)$, qui sont les coordonnées de C.

(c) Soit (x, y) les coordonnées de M. Comme M est le centre d'un cercle passant par A, B, O on a $MA = MO = MB$. Ceci nous dit que $x^2 + (y - 30)^2 = x^2 + y^2 = (x - 40)^2 + y^2$. La première égalité nous donne que $y = 15$ et la deuxième égalité nous donne $x = 20$, alors $M = (20, 15)$. Par le théorème de Pythagore, la longueur de MC est $\sqrt{\left(20 - \frac{72}{5}\right)^2 + \left(15 - \frac{96}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{28^2+(-21)^2}}{5} = \frac{35}{5} = 7$.

C2 (a) Trouvez toutes les solutions réelles à l'équation $a^2 + 10 = a + 10^2$.

(b) Trouvez deux nombres réels strictement positifs $a, b > 0$ tel que $a \neq b$ et $a^2 + b = b^2 + a$.

(c) Trouvez tous les triplets de nombres réels (a, b, c) tel que $a^2 + b^2 + c = b^2 + c^2 + a = c^2 + a^2 + b$.

Solution

On peut réécrire l'équation comme suit:

$$\begin{aligned} &a^2 - b^2 = a - b \\ &(a - b)(a + b) = (a - b) \\ &(a - b)(a + b - 1) = 0 \end{aligned}$$

On en tire que les deux solutions sont $a = b$ et $a = 1 - b$.

(a) Par le résultat précédent, les solutions sont $a = 10, a = -9$.

(b) La paire $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{3}{4}$ satisfait les deux équations décrites plus haut. N'importe quelle paire de nombres réels strictement positifs a, b avec $a + b = 1$ suffit.

(c) En appliquant le résultat à la première égalité, on trouve $a = c$ or $a = 1 - c$. On fait de même pour l'égalité entre le premier et le troisième terme, ce qui donne $b = c$ or $b = 1-c$. Finalement, avec le deuxième et troisième terme, on obtient $a = b$ or $b = 1 - a$.

On fixe une valeur réelle pour a. Ensuite $b = a$ ou $b = 1 - a$ et $c = a$ ou $c = 1 - a$. Chaque paire (b, c) formée de cette façon satisfait $b = c$ ou $b = 1 - c$. Ainsi, les quatre solutions $(a, a, a), (a, a, 1 - a), (a, 1 - a, a), (a, 1 - a, 1 - a)$ satisfont la chaîne d'égalités.

C3 Alphonse et Bernard jouent au jeu suivant. Deux entiers strictement positifs m et n sont écrits sur un tableau. À chaque tour, un joueur choisit un nombre sur le tableau, l'efface et le remplace par n'importe lequel de ses diviseurs à l'exception des diviseurs qui sont déjà apparu sur le tableau depuis le début de la partie . Par exemple, si 10 et 17 sont écrits sur le tableau, un joueur peut effacer le 10 et le remplacer par un 2. Le premier joueur qui ne peut plus modifier le tableau à son tour perd la partie. C'est Alphonse qui débute la partie.

(a) Supposons que $m = 2^{40}$ et $n = 3^{51}$. Quel joueur est toujours capable de remporter la partie? Expliquez sa stratégie gagnante.

(b) Supposons que $m = 2^{40}$ et $n = 2^{51}$. Quel joueur est toujours capable de remporter la partie? Expliquez sa stratégie gagnante.

Solution

(a) Pour la partie (a), on remarque que m et n sont copremiers (plus grand diviseur commun est 1). Ainsi, à chaque tour un joueur peut remplacer un nombre k par un de ses diviseurs l strictement plus petit que k en autant que $l > 1$ ou $l = 1$ si 1 n'est toujours pas apparu sur le tableau.

Au lieu de travailler avec les nombres donnés, on travaille avec le nombre de premiers entrant dans leur factorisation. De cette façon, le jeu devient équivalent au jeu suivant. Deux nombres m et n sont écrits au tableau. À chaque tour, un joueur peut prendre le nombre k supérieur à zéro 0 et le remplacer par n'importe quel entier strictement positif mais inférieur à k, ou le remplacer par un 0, en autant que 0 ne soit pas déjà écrit sur le tableau. Le premier joueur qui ne peut plus jouer perd la partie.

Il est alors clair que $m = 0, n = 1$ est une position perdante. Ainsi, $m = 0, n \geq 2$ est une position gagnante (le joueur peut remplacer n par 1 et fait perdre l'adversaire). De plus, $m = 1, n \geq 1$ est une position gagnante (puisque le joueur peut remplacer n par zéro et gagner). Donc $m = 2, n = 2$ est une position perdante; $m = 2, n \geq 3$ est une position gagnante; $m = 3, n = 3$ est une position perdante, $m = 3, n \geq 4$ est une position gagnante. Par induction,pour $k \geq 2$, $m = k, n = k$ est une position perdante, tandis que $m = k, n \geq k + 1$ est une position gagnante.

Nous sommes dans le cas où $m = 40, n = 51 \geq 41$ dans le jeu "transformé", c'est donc une position gagnante et Alphonse gagne.

(b) Ce cas est différent puisque m et n ont plus d'un diviseur en commun. Nous allons analyser le jeu original sans passer par le jeu transformé. Comme m et n sont des puissances de 2, seules des puissances de deux apparaîtront sur le tableau durant la partie.

On remarque tout d'abord que le premier joueur à écrire une nombre inférieur ou égal à deux perd la partie. Si le joueur écrit 1, le 2 n'a donc toujours pas été écrit au tableau; l'adversaire remplace donc l'autre nombre par 2 au tour suivant et remporte la partie (Ceci fonctionne puisqu'au départ, $m > 2, n > 2$ et au moment où le 1 apparait sur le tableau, l'autre nombre est supérieur à 2). Si le joueur écrit 2, alors le 1 n'est toujours pas apparu au tableau; l'adversaire remplace l'autre nombre par 1 au tour suivant et remporte la partie.

De la même façon, le premier joueur qui écrit un nombre inférieur à 8 perd. S'il écrit un 4, l'adversaire 8 et force ainsi le premier joueur à écrire un nombre inférieur ou égal à 2 (il n'est pas possible de remplacer le 8 par un quatre puisqu'il est déjà apparu au tableau). Si un joueur écrit un 8, son adversaire écrit un 4 et gagne.

Par induction, on trouve que si $m, n > 2^{2k-1}$ le premier joueur à écrire un nombre inférieur ou égal à 2^{2k-1} perd la partie pour chaque choix de $k > 0$. Dans le cas $m = 2^{40}, n = 2^{53}$, le premier joueur à écrire un nombre inférieur ou égal à 2^{39} perd. Ainsi, à son premier tour, Alphonse remplace 2^{53} par 2^{41} et gagne car à son tour, Bernard voit 2^{40} et 2^{41} sur le tableau et doit en remplacer un par un nombre inférieur ou égal à 2^{39}.

C4 Pour tout nombre réel x, on définit $[x]$ comme le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $[5] = 5$, $[7,9] = 7$ et $[-2,4] = -3$. Une *progression arithmétique* de longueur k est une séquence $a_1, a_2, ..., a_k$ avec la propriété qu'il existe un nombre réel b tel que $a_{i+1} - a_i = b$ pour toute valeur de $1 \leq i \leq k-1$.

Soit $\alpha > 2$ un nombre irrationnel. Alors $S = \{[n \cdot \alpha] : n \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des entiers qui peuvent être écrits comme $[n \cdot \alpha]$ pour un certain entier n..

(a) Montrez que pour tout entier $m \geq 3$, il existe m nombres distincts dans S qui ensemble forment une progression arithmétique de longueur m.

(b) Montrez qu'il n'y a aucune progression arithmétique de longueur infinie dans S.

Solution

(a) On commence par montrer l'affirmation suivante: Pour tout entier positif m il existe des entiers positifs $n \leq m$ et x_m tel que $|n\alpha - x_m| < \frac{1}{m}$.

On considère les *parties fractionnaires* des nombres $n\alpha$ pour $n = 0, \ldots, m$, i.e., on considère $\{n\alpha\} := n\alpha - [n\alpha]$. Par la définition de la partie entière d'un nombre réel, on conclut que chaque $\{n\alpha\} \in [0, 1)$.

Par le principe des nids de pigeon, il doit exister deux entiers distincts $0 \leq n_1 < n_2 \leq m$ tel que les parties fractionnaires de $\{n_1\alpha\}$ et $\{n_2\alpha\}$ appartiennent au *même* intervalle $[(k-1)/m, k/m)$, pour un certain $k = 1, \ldots, m$. Ainsi, $|\{n_2\alpha\} - \{n_1\alpha\}| < \frac{1}{m}$.

On a donc $|n_2\alpha - [n_2\alpha] - n_1\alpha + [n_1\alpha]| < \frac{1}{m}$, et en prenant $n := n_2 - n_1$ et $x_m := [n_2\alpha] - [n_1\alpha]$, on conclut que $|n\alpha - x_m| < \frac{1}{m}$.

De plus, puisque $0 \leq n_1 < n_2 \leq m$, on trouve que $n \leq m$ est un entier strictement positif. En utilisant $\alpha > 2$ et $n_2 > n_1$ on trouve que $x_m = [n_2\alpha] - [n_1\alpha] \geq [\alpha] \geq 2$ est aussi un entier strictement positif.

Comme démontré plus tôt, pour chaque entier $m \geq 3$, on peut trouver des entiers strictement positifs $n \leq m$ et x_m tel que $|n\alpha - x_m| < \frac{1}{m}$. EN ayant peut-être à remplacer n par $-n$ et x_m par $-x_m$, on peut supposer que $0 < \{n\alpha\} < \frac{1}{m}$, et donc $0 < n\alpha - x_m < 1/m$. Donc $x_m = [n\alpha]$ et alors $n\alpha = x_m + \{n\alpha\}$. On déduit que pour chaque $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$ on a $kx_m < nk\alpha = kx_m + k\{n\alpha\} < kx_m + 1$. Alors $[nk\alpha] = kx_m$, ce qui montre que les nombres $[n\alpha], [2n\alpha], \cdots, [mn\alpha]$ forment une progression arithmétique.

(b) Supposons qu'il existe une progression arithmétique de longueur infinie dans S: $[n_1\alpha]$, $[n_2\alpha], \cdots, [n_i\alpha], \cdot\cdot$

Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, utilisant le fait que $[n_i\alpha] + [n_{i+2}\alpha] = 2[n_{i+1}\alpha]$, on a que $(n_{i+2} - 2n_{i+1} + n_i) \cdot \alpha = \{n_{i+2}\alpha\} - 2\{n_{i+1}\alpha\} + \{n_i\alpha\} \in (-2, 2)$, où on a utilisé dans la dernière inégalité le fait que la partie fractionnaire de tout nombre réel est situé dans l'intervalle $[0, 1)$.

Par contre, puisque chaque $n_i \in \mathbb{Z}$ et que $\alpha > 2$, pour chaque $i \in \mathbb{N}$ nous avons $n_{i+2} - 2n_{i+1} + n_i = 0$. Donc, $n_1\alpha, n_2\alpha, \cdots, n_i\alpha, \cdots$ est une progression arithmétique. La différence entre les deux progressions arithmétiques est aussi une progression arithmétique: $\{n_1\alpha\}$, $\{n_2\alpha\}, \cdots, \{n_i\alpha\}, \cdots$.

Les progressions arithmétiques ne peuvent être bornées à moins qu'elles ne soient constantes. Ainsi $\{n_2\alpha\} = \{n_1\alpha\}$, ce qui nous donne que $n_2\alpha - n_1\alpha = [n_2\alpha] - [n_1\alpha] \in \mathbb{Z}$ et donc $\alpha \in \mathbb{Q}$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse ($n_2 \neq n_1$ car ils appartiennent à une même progression arithmétique infinie).