Financière Sun Life

Le Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life 2012

Veuillez écrire clairement en lettres moulées et fournir toute l'information requise ci-dessous. Votre examen pourrait être rejeté si vous n'écrivez pas clairement en lettres moulées ou ne fournissez pas toute l'information requise. Cet examen ne sera pas jugé valide à moins qu'il soit accompagné du formulaire signé de votre superviseur d'examen.

Nom :

Prénom :

Êtes-vous actuellement un élève/étudiant à temps plein dans une école primaire ou secondaire ou un Cégep ou obtenez-vous votre enseignement à domicile par vos parents, et ce, depuis le 15 septembre de cette année?

☐ O ☐ N

Êtes-vous citoyen canadien ou résident permanent du Canada (quelle que soit votre adresse actuelle)?

☐ O ☐ N

Année scolaire

☐ 8 ☐ 9 ☐ 10
☐ 11 ☐ 12 ☐ Cégep
Autre : ________

Grandeur du t-shirt
(taille Enfant)

☐ XS ☐ S ☐ M
☐ L ☐ XL ☐ XXL

Date de naissance

a a a a m m j j

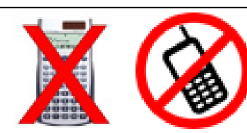
Sexe: (facultatif)

☐ M ☐ F

Courriel :

Signature : ________________________________

DIRECTIVES : NE PAS OUVRIR CE FEUILLET AVANT QU'ON NE VOUS L'INDIQUE



Les telephones cellulaires et les calculatrices ne sont pas permis .

EXAMEN : Le DOCM compte trois parties à remplir en 2 heures et 30 minutes.
PARTIE A: Compte quatre questions de base de quatre points chacune.
PARTIE B: Compte quatre questions de niveau intermédiaire de six points chacune.
PARTIE C: Compte quatre questions de niveau avancé de dix points chacune.

DIAGRAMMES : Les diagrammes ne sont pas à l'échelle; ce ne sont que des aides.

TRAVAIL ET RÉPONSES : Tout le travail pour arriver aux solutions et les réponses doivent figurer dans le présent feuillet, dans l'espace réservé à cet effet. On attribue des points pour avoir complété le travail et pour la clarté. Pour les sections A et B, vous n'avez pas à montrer votre travail pour obtenir toutes les notes. Si votre réponse ou solution est incorrecte toutefois, tout le travail accompli et présenté dans ce feuillet sera pris en compte pour l'attribution de notes partielles. Pour la section C, vous devez montrer votre travail et fournir la bonne réponse ou solution pour obtenir toutes les notes.

On s'attend à ce que tous les calculs et les réponses soient exprimés en des chiffres exacts, tels que 4π, $2 + \sqrt{7}$, etc., plutôt que 12.566, 4.646, etc.

Les noms des lauréats seront publiés sur le site Web de la Société mathématique du Canada. Il est interdit de discuter publiquement du contenu du DOCM 2012 et de vos réponses et solutions, y compris dans des séances de clavardage, pendant au moins 24 heures.

N'écrivez pas dans ces cases.

A1	A2	A3	A4	A	B1	B2	B3	B4	B	C1	C2	C3	C4	C	ABC

______ Initiales de la personne qui attribue les points ______ Initiales de la personne qui saisit les données

Partie A: Question 1 (4 points)

Trouver l'entier positif n tel que $8^4 = 4^n$.

Votre solution :

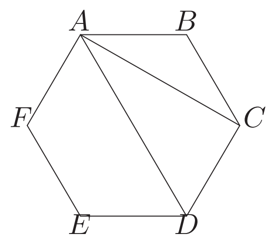
Partie A: Question 2 (4 points)

Soit x la valeur *moyenne* des six nombres suivants: $\{12, 412, 812, 1212, 1612, 2012\}$. Déterminer la valeur de x.

Votre solution :

Partie A: Question 3 (4 points)

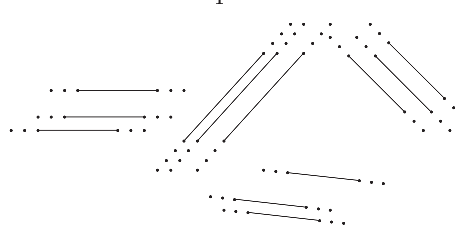
Soit $ABCDEF$ un hexagone dont les côtés sont de même longueur et dont tous les angles sont égaux. L'aire de l'hexagone $ABCDEF$ est exactement r fois l'aire du triangle ACD. Déterminer la valeur de r.



Votre solution :

Partie A: Question 4 (4 points)

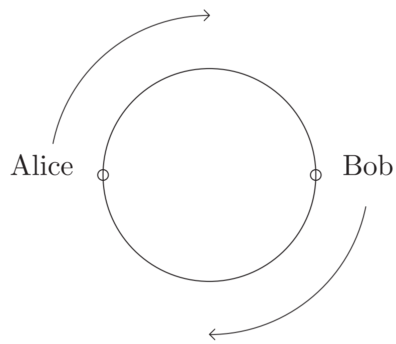
Douze droites différentes sont tracées dans le plan cartésien de sorte que chaque droite est parallèle à exactement deux autres droites. En outre, trois droites ne se coupent jamais en un point. Déterminer le nombre total de points d'intersection entre les douze droites.



Votre solution :

Partie B: Question 1 (6 points)

Alice et Bob courent autour d'une piste circulaire dans le sens des aiguilles d'une montre, chacun à une vitesse constante. Alice peut compléter un tour en t secondes, et Bob peut compléter un tour en 60 secondes. Ils commencent à des points diamétralement opposés.



Quand ils se rencontrent pour la première fois, Alice a déjà complété 30 tours. Déterminer toutes les valeurs possibles de t.

Votre solution :

Partie B: Question 2 (6 points)

Pour chaque entier positif n, on définit $\varphi(n)$ comme étant le nombre de diviseurs positifs de n. Par exemple, $\varphi(10) = 4$ car 10 admet 4 diviseurs positifs: $\{1, 2, 5, 10\}$.

Si n est un entier positif tel que $\varphi(2n) = 6$, déterminer la valeur minimale possible de $\varphi(6n)$.

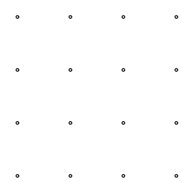
Votre solution :

Partie B: Question 3 (6 points)

Pour la grille carrée des points 4 par 4 suivante, déterminer le nombre de façons d'étiqueter dix points différents $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ afin que les longueurs des neuf segments

$$AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ$$

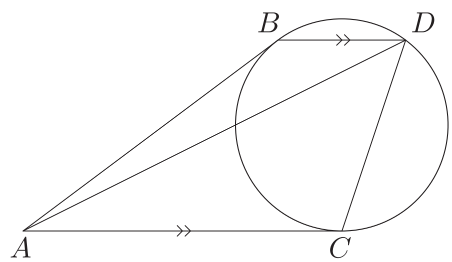
soient en ordre strictement croissant.



Votre solution :

Partie B: Question 4 (6 points)

Dans le diagramme suivant, deux droites qui se coupent en un point A sont tangentes à un cercle aux points B et C. La droite parallèle à AC et qui passe par B coupe le cercle à nouveau au point D. Rejoignez les segments de droites CD et AD. Supposons que $AB = 49$ et $CD = 28$. La longueur de AD est un nombre entier positif n. Déterminer la valeur de n.



Votre solution :

Partie C: Question 1 (10 points)

Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x - 8$.

(a) (2 points) Déterminer les valeurs de $f(2)$ et $g(f(2))$.

(b) (4 points) Déterminer toutes les valeurs de x telles que $f(g(x)) = g(f(x))$.

(c) (4 points) Soit $h(x) = 3x - r$. Déterminer toutes les valeurs de r telles que $f(h(2)) = h(f(2))$.

Votre solution :

Partie C: Question 2 (10 points)

On remplit une grille 3×3 avec des 0s et des 1s. On marque un point pour chaque ligne, colonne et diagonale dont la somme des entrées est *impaire*.

1	1	0
1	0	1
0	1	1

1	1	1
1	0	1
0	1	1

Par exemple, la grille à gauche a 0 points et celle à droite a 3 points.

(a) (2 points) Remplir la grille suivante de sorte qu'elle a exactement 1 point. Aucun travail supplémentaire n'est requis. Plusieurs réponses sont possibles. Vous devez seulement fournir une réponse.

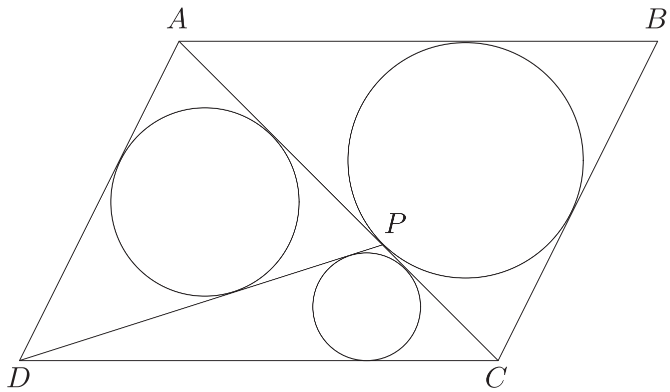
(b) (4 points) Déterminer toutes les grilles avec exactement 8 points.

(c) (4 points) Soit E le nombre des grilles avec un nombre impair de points et O le nombre des grilles avec un nombre pair de points. Démontrer que $E = O$.

Votre solution :

Partie C: Question 3 (10 points)

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On trace la diagonale AC. Un cercle est inscrit à l'intérieur du ΔABC tangent aux trois côtés et touchant le côté AC en un point P.



(a) (2 points) Démontrer que $DA + AP = DC + CP$.

(b) (4 points) Tracer le segment de droite DP. Un cercle de rayon r_1 est inscrit à l'intérieur du ΔDAP tangent aux trois côtés. Un cercle de rayon r_2 est inscrit à l'intérieur du ΔDCP tangent aux trois côtés. Démontrer que

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{AP}{PC}.$$

(c) (4 points) Supposons que $DA + DC = 3AC$ et $DA = DP$. Soit r_1, r_2 les deux rayons définis en (b). Déterminer le rapport r_1/r_2.

Votre solution :

Part C: Question 4 (10 marks)

Si n est un entier positif, on dit que le n-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ où chaque x_i est un entier positif est un *super-carré* si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(1) $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n$.

(2) La somme $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2$ est un carré parfait pour chaque k.

Par exemple, $(12, 9, 8)$ est super-carré car $12 > 9 > 8$, et chacune des sommes 12^2, $12^2 + 9^2$, et $12^2 + 9^2 + 8^2$ est un carré parfait.

(a) (2 points) Déterminer toutes les valeurs de t telles que $(32, t, 9)$ est un super-carré.

(b) (2 points) Trouver un 4-uplet super-carré (x_1, x_2, x_3, x_4) avec $x_1 < 200$.

(c) (6 points) Déterminer s'il existe un 2012-uplet super-carré.

Votre solution :

Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life 2012