PART A

1. *Solution*

By the definition, $2\nabla 0 = 2^2 + 3^0 = 4 + 1 = 5$

$$0\nabla 1 = 0^2 + 3^1 = 0 + 3 = 3$$

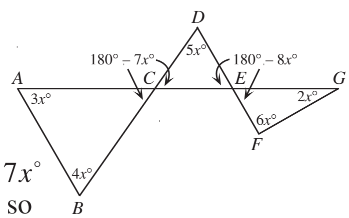
and so
$$\begin{aligned}(2\nabla 0)\nabla(0\nabla 1) &= 5\nabla 3\\ &= 5^2 + 3^3\\ &= 25 + 27\\ &= 52\end{aligned}$$

Comments

This question was quite well done. Most students correctly interpreted the given operation to do the required calculations.

Average: 3.6

2. *Solution*



From the diagram, $\angle ACB = 180^\circ - 7x^\circ$ and $\angle FEG = 180^\circ - 8x^\circ$.

Therefore, $\angle DCE = 180^\circ - 7x^\circ$ and $\angle DEC = 180^\circ - 8x^\circ$, so from ΔCDE,

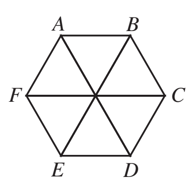
$$5x^\circ + 180^\circ - 7x^\circ + 180^\circ - 8x^\circ = 180^\circ \quad (*)$$
$$360^\circ - 10x^\circ = 180^\circ$$
$$10x^\circ = 180^\circ$$
$$x = 18$$

Comments

Extremely well done! Almost all of the competitors had a good handle on dealing with angles in triangles.

Average: 4.1

3. *Solution 1*



Let *ABCDEF* be a regular hexagon with a side length of 1. Each angle is 120°. Thus, if we join *FC*, *EB*, *DA*, each of the interior angles is bisected, and so each part is 60°. Thus the hexagon is decomposed into 6 equilateral triangles, as shown.

The maximum distance between any two points on the hexagon is the distance between two opposite vertices. Since each of the triangles is equilateral with a side length of 1, the diagonal distance is 2, ie. the maximum possible length of *PQ* is 2.

Brief version of Solution 1

A regular hexagon with side length 1 can be decomposed into 6 equilateral triangles with a side length of 1, as shown. The maximum distance between any two points is between opposite vertices, and this distance is 2.

PARTIE A

1. *Solution*

D'après la définition, on a : $2\nabla 0 = 2^2 + 3^0 = 4 + 1 = 5$

$$0\nabla 1 = 0^2 + 3^1 = 0 + 3 = 3$$

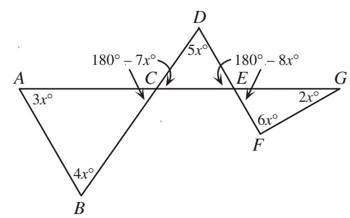
Donc :
$$\begin{aligned}(2\nabla 0)\nabla(0\nabla 1) &= 5\nabla 3\\ &= 5^2 + 3^3\\ &= 25 + 27\\ &= 52\end{aligned}$$

Commentaires

Les élèves ont bien réussi cette question. La plupart des élèves ont correctement interprété les opérations données nécessaires aux calculs requis.

Moyenne: 3,6

2. *Solution*



D'après le diagramme, $\angle ACB = 180^\circ - 7x^\circ$ et $\angle FEG = 180^\circ - 8x^\circ$.

Donc $\angle DCE = 180^\circ - 7x^\circ$ et $\angle DEC = 180^\circ - 8x^\circ$.

Dans le triangle *CDE*, on a donc :

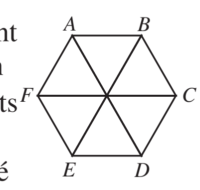
$$5x^\circ + 180^\circ - 7x^\circ + 180^\circ - 8x^\circ = 180^\circ \quad (*)$$
$$360^\circ - 10x^\circ = 180^\circ$$
$$10x^\circ = 180^\circ$$
$$x = 18$$

Commentaires

Chapeau! La quasi-totalité des concurrents ont bien maîtrisé cette question qui nécessitait l'application des connaissances des angles aux triangles.

Moyenne: 4,1

3. *Solution 1*



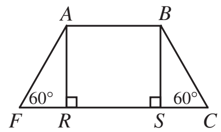
Soit *ABCDEF* un hexagone régulier dont les côtés ont une longueur de 1. Chacun de ses angles mesure 120°. Les segments *FC*, *EB* et *DA* sont des bissectrices des angles. L'hexagone est donc décomposé en 6 triangles équilatéraux.

La distance maximale possible entre deux points sur l'hexagone est celle entre deux sommets opposés. Puisque chaque triangle équilatéral a des côtés de longueur 1, la longueur maximale possible du segment est égale à 2.

Version abrégée de la solution 1

Comme l'indique le diagramme, l'hexagone régulier peut être divisé en 6 triangles équilatéraux ayant des côtés de longueur 1. La distance maximale possible entre deux points sur l'hexagone est celle entre deux sommets opposés. Elle est égale à 2.

Solution 2



The maximum distance is between two opposite vertices, say F and C by symmetry.
Drop perpendiculars from A and B to meet FC at R and S respectively.
Since $AB = 1$ and AB is parallel to RS, then $RS = 1$.
By symmetry, $FR = CS$. But $FR = AF\cos 60^\circ = 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Therefore, $CF = 2$, and so the maximum possible distance is 2.

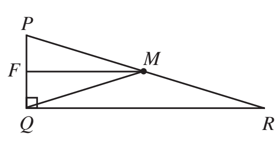
Comments
The key problems here were to interpret the question and to then figure out that the longest distance between any two points is the distance between opposite vertices. The easiest way to calculate this length was to break the hexagon up into 6 equilateral triangles each of side length one. If you didn't notice this, have a look at this idea.
Average: 3.6

4. *Solution*
Solving the equation,

$$\begin{aligned} 2\left(2^{2x}\right) &= 4^x + 64 \\ 2\left(4^x\right) &= 4^x + 64 \\ 4^x &= 64 \\ x &= 3 \end{aligned} \quad \text{or} \quad \begin{aligned} 2\left(2^{2x}\right) &= 4^x + 64 \\ 2\left(2^{2x}\right) &= 2^{2x} + 64 \\ 2^{2x} &= 64 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Comments
This question was reasonably well done. Students who are comfortable dealing with exponents had a great deal of success on this question. Many students continue to have difficulty with exponents.
Average: 3.8

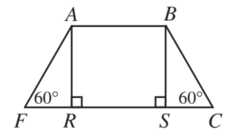
5. *Solution 1*



Join M to Q.
Through M, draw a line parallel to QR meeting PQ at F.
Therefore, $PF = FQ = 7$ and $MF = 24$.
By Pythagoras, $MQ = 25$, and so

$$\begin{aligned} \cos(\angle MQP) &= \cos(\angle MQF) \\ &= \frac{FQ}{MQ} \\ &= \frac{7}{25} \end{aligned}$$

Solution 2



Par symétrie, la distance maximale entre deux points sur l'hexagone est celle entre deux sommets opposés, disons F et C. Aux points A et B, on abaisse des perpendiculaires AR et AS au segment FC.
Puisque $AB = 1$ et que AB est parallèle à RS, alors $RS = 1$.
Par symétrie, $FR = CS$. Or $FR = AF\cos 60^\circ = 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
Donc $CF = 2$ et la longueur maximale possible est donc égale à 2.

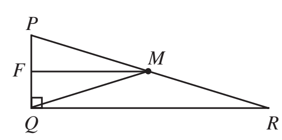
Commentaires
Une grande partie des difficultés de cette question résidait dans son interprétation. Les élèves devaient par la suite déduire que la distance entre deux sommets opposés représentait la distance maximale entre deux points. La façon la plus rapide de la calculer consistait à diviser l'hexagone en six triangles équilatéraux dont chacune des arêtes équivalait à un. Nous invitons les élèves qui n'ont pas envisagé cette approche de résolution de l'examiner de plus près.
Moyenne: 3,6

4. *Solution*
On a :

$$\begin{aligned} 2\left(2^{2x}\right) &= 4^x + 64 \\ 2\left(4^x\right) &= 4^x + 64 \\ 4^x &= 64 \\ x &= 3 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} 2\left(2^{2x}\right) &= 4^x + 64 \\ 2\left(2^{2x}\right) &= 2^{2x} + 64 \\ 2^{2x} &= 64 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Commentaires
Les élèves ont généralement bien réussi cette question, tout particulièrement ceux qui maîtrisaient bien le concept d'exposant (qui d'ailleurs pose encore des difficultés pour bon nombre d'élèves).
Moyenne: 3,8

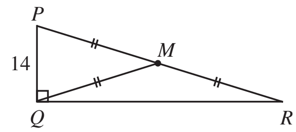
5. *Solution 1*



On joint M et Q.
Au point M, on trace un segment parallèle au côté QR. Ce segment coupe le côté PQ en F.
Donc $PF = FQ = 7$ et $MF = 24$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle MFQ, $MQ = 25$, d'où :

$$\begin{aligned} \cos(\angle MQP) &= \cos(\angle MQF) \\ &= \frac{FQ}{MQ} \\ &= \frac{7}{25} \end{aligned}$$

Solution 2



Join M to Q. By Pythagoras, $PR = \sqrt{14^2 + 48^2} = 50$. Since M is the midpoint of the hypotenuse, then $MQ = MP = MR$. (This is because the circle circumscribed around ΔPQR has PR as diameter (since $\angle PQR = 90^\circ$) and so M is the centre and thus MP, MQ and MR are radii.) Therefore, $\angle MQP = \angle MPQ$ and so $\cos(\angle MQP) = \cos(\angle MPQ) = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$.

Comments

This is a nice question because it can be done with a Euclidean approach or a more analytic approach. Some students had difficulty when they encountered a triangle that was not right-angled in which they had to calculate a cosine.

Average: 2.7

6. *Solution*

We calculate the first few terms in the series

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = \frac{t_1 - 1}{t_1 + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$t_3 = \frac{t_2 - 1}{t_2 + 1} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$t_4 = \frac{t_3 - 1}{t_3 + 1} = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{-\frac{1}{2} + 1} = -3$$

$$t_5 = \frac{t_4 - 1}{t_4 + 1} = \frac{-3-1}{-3+1} = 2$$

Since a term in the sequence depends only on the previous one, then the sequence will cycle with a period of 4. Thus, $t_1 = t_5 = \cdots = t_{997} = t_{1001} = 2$. Therefore, $t_{998} = \frac{1}{3}$ and $t_{999} = -\frac{1}{2}$.

Comments

This question was very well done! Most students quickly determined after a few calculations that the sequence was cyclic, and on this basis determined the value of the required term. The nicest solution by a student was to repeatedly apply the definition:

$$t_{n+1} = \frac{t_n - 1}{t_n + 1} = \frac{\frac{t_{n-1}-1}{t_{n-1}+1} - 1}{\frac{t_{n-1}-1}{t_{n-1}+1} + 1} = \frac{(t_{n-1} - 1) - (t_{n-1} + 1)}{(t_{n-1} - 1) + (t_{n-1} + 1)} = -\frac{1}{t_{n-1}}$$

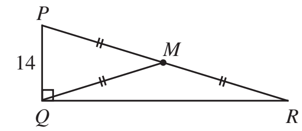
In a similar way,

$$t_{n-1} = -\frac{1}{t_{n-3}}$$

and so

$$t_{n+1} = -\frac{1}{-\frac{1}{t_{n-3}}} = t_{n-3}$$

Solution 2



On joint M et Q.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PQR, $PR = \sqrt{14^2 + 48^2} = 50$.
Puisque M est le milieu de l'hypoténuse, $MQ = MP = MR$. (Puisque $\angle PQR = 90^\circ$, PQ est le diamètre du cercle circonscrit au triangle et M en est le centre. Donc MP, MQ et MR sont des rayons.)
Donc $\angle MQP = \angle MPQ$, d'où

$$\cos(\angle MQP) = \cos(\angle MPQ) = \frac{14}{50} = \frac{7}{25} \cdot$$

Commentaires

Il s'agissait d'une question intéressante en raison de ses deux méthodes de résolution : l'approche euclidienne ou une approche analytique plus générale. Quelques élèves n'ont pu contourner la difficulté que posait la présence d'un triangle sans angle droit, ce qui nécessitait le calcul du cosinus.

Moyenne: 2,7

6. *Solution*

Les premiers termes de la suite sont :

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = \frac{t_1 - 1}{t_1 + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$t_3 = \frac{t_2 - 1}{t_2 + 1} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$t_4 = \frac{t_3 - 1}{t_3 + 1} = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{-\frac{1}{2} + 1} = -3$$

$$t_5 = \frac{t_4 - 1}{t_4 + 1} = \frac{-3-1}{-3+1} = 2$$

Puisque chaque terme de la suite dépend seulement du terme précédent, les valeurs se reproduisent à tous les 4 termes. Les valeurs ont donc un cycle de longueur 4. Donc $t_1 = t_5 = \cdots = t_{997} = t_{1001} = 2$. Donc $t_{998} = \frac{1}{3}$ et $t_{999} = -\frac{1}{2}$.

Commentaires

Cette question a été très bien réussie! La plupart des élèves ont conclu, moyennant quelques calculs, qu'ils se trouvaient en présence d'une séquence cyclique : ils ont par la suite été en mesure de trouver la valeur du terme requis. La solution la plus astucieuse consistait à appliquer la définition de façon répétitive :

$$t_{n+1} = \frac{t_n - 1}{t_n + 1} = \frac{\frac{t_{n-1}-1}{t_{n-1}+1} - 1}{\frac{t_{n-1}-1}{t_{n-1}+1} + 1} = \frac{(t_{n-1} - 1) - (t_{n-1} + 1)}{(t_{n-1} - 1) + (t_{n-1} + 1)} = -\frac{1}{t_{n-1}}$$

Thus, the sequence repeats every four terms. What a nice solution!
Average: 2.7

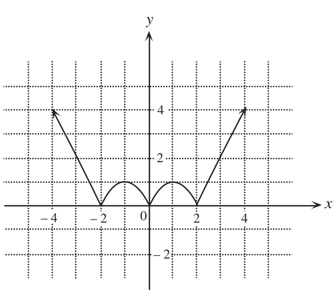
7. *Solution*
We treat a as a constant and solve for x, y, z in terms of a.
From the second equation, $y = x - a$ (*)
Therefore, from the first equation,

$$2x + a = x - a$$
$$x = -2a$$

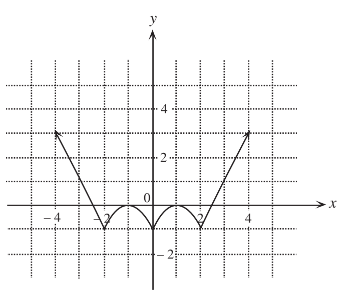
Substituting into (*), $y = -3a$.
Substituting into the 3rd equation, $z = x + y = -5a$.
So $x + y + z = -10a$.
Since a is a positive integer, the maximum value for $x + y + z$ is –10 (which occurs when $a = 1$).

Comments
This question was done very well. We anticipated that this would be quite a difficult question, and so we were extremely happy with the results. Many students handled this system of equations with relative ease by figuring out that they had to solve for x, y and z in terms of a.
Average: 2.8

8. *Solution 1 (Graphical)*

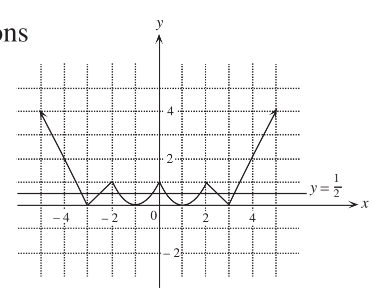


$y = |g(x)|$



$y = |g(x)| - 1$

so the number of solutions of $\left||g(x)| - 1\right| = \frac{1}{2}$ is 8, from the third graph.



$y = \left||g(x)| - 1\right|$

De la même manière,

$$t_{n-1} = -\frac{1}{t_{n-3}}$$

On peut conclure que

$$t_{n+1} = -\frac{1}{-\frac{1}{t_{n-3}}} = t_{n-3}$$

Par conséquent, on peut affirmer que la séquence se répétera à tous les quatre termes. Il suffisait d'y penser!
Moyenne: 2,7

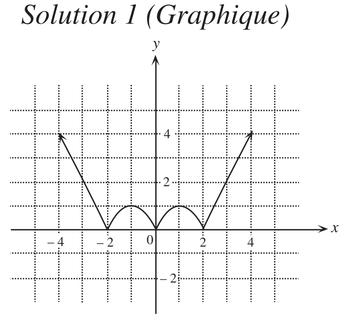
7. *Solution*
On exprime d'abord x, y et z en fonction de a.
D'après la deuxième équation, $y = x - a$ (*) .
On reporte $y = x - a$ dans la première équation :

$$2x + a = x - a$$
$$x = -2a$$

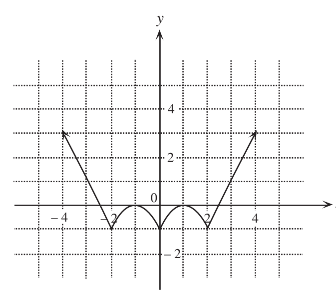
On reporte $x = -2a$ dans l'équation (*) pour obtenir $y = -3a$.
On reporte $y = -3a$ dans la troisième équation pour obtenir $z = x + y = -5a$.
Donc $x + y + z = -10a$.
Puisque a peut prendre la valeur de n'importe quel entier strictement positif, la valeur maximale possible de l'expression $x + y + z$ est –10. On l'obtient lorsque $a = 1$.

Commentaires
Nous avons été agréablement surpris du succès des élèves à résoudre cette question qui se voulait extrêmement difficile; de nombreux élèves ont facilement résolu ce système d'équations où il fallait trouver la valeur de x, y et de z en fonction de a.
Moyenne: 2,8

8. *Solution 1 (Graphique)*

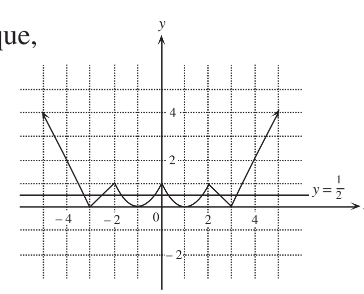


$y = |g(x)|$



$y = |g(x)| - 1$

Selon le troisième graphique, l'équation $\left||g(x)| - 1\right| = \frac{1}{2}$ admet 8 solutions.



$y = \left||g(x)| - 1\right|$

Solution 2 (Algebraic)

From the original equation $\left||g(x)|-1\right|=\frac{1}{2}$, using the definition of absolute value we obtain,

$$|g(x)|-1=\tfrac{1}{2} \quad \text{or} \quad |g(x)|-1=-\tfrac{1}{2}$$
$$|g(x)|=\tfrac{3}{2} \quad \text{or} \quad |g(x)|=\tfrac{1}{2}$$
$$g(x)=\pm\tfrac{3}{2} \quad \text{or} \quad g(x)=\pm\tfrac{1}{2}$$

From the original graph,

(a) $g(x)=\frac{3}{2}$ has 1 solution,

(b) $g(x)=-\frac{3}{2}$ has 1 solution,

(c) $g(x)=\frac{1}{2}$ has 3 solutions,

(d) $g(x)=-\frac{1}{2}$ has 3 solutions.

Therefore, $\left||g(x)|-1\right|=\frac{1}{2}$ has 8 solutions.

Comments

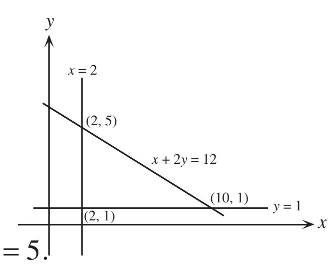
This question was a good test of the concept of absolute value from a graphical perspective. Some students used a graphical approach to convert the original graph to the desired one. Quite a few students used the graphical approach to determine the potential values for either $g(x)$ or $|g(x)|$ and then read the appropriate number of solutions off the graph. Students who tried to determine the actual equation of the curve tended to get bogged down in their calculations.

Average: 2.0

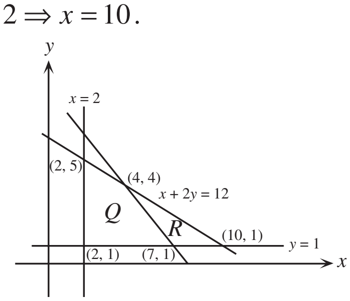
Part B

1. *Solution*

(a) The lines $x=2$ and $y=1$ intersect at $(2,1)$. The lines $x=2$ and $x+2y=12$ intersect at $(2,5)$, since $x=2 \Rightarrow 2+2y=12 \Rightarrow y=5$. The lines $y=1$ and $x+2y=12$ intersect at $(10,1)$, since $y=1 \Rightarrow x+2=12 \Rightarrow x=10$.



(b) $x+y=8$ intersects $x=2$ at $(2,6)$, which is *above* the point of intersection of $x=2$ and $x+2y=12$.
$x+y=8$ intersects $y=1$ at $(7,1)$.



To find the intersection point of $x+y=8$ and $x+2y=12$, subtract the first equation from the second to obtain $y=4$, so $x=4$.

Solution 2 (Algébrique)

D'après l'équation $\left||g(x)|-1\right|=\frac{1}{2}$, on a :

$$|g(x)|-1=\tfrac{1}{2} \quad \text{ou} \quad |g(x)|-1=-\tfrac{1}{2}$$
$$|g(x)|=\tfrac{3}{2} \quad \text{ou} \quad |g(x)|=\tfrac{1}{2}$$
$$g(x)=\pm\tfrac{3}{2} \quad \text{ou} \quad g(x)=\pm\tfrac{1}{2}$$

D'après le graphique donné :

a) $g(x)=\frac{3}{2}$ admet 1 solution,

b) $g(x)=-\frac{3}{2}$ admet 1 solution,

c) $g(x)=\frac{1}{2}$ admet 3 solutions,

d) $g(x)=-\frac{1}{2}$ admet 3 solutions.

Donc $\left||g(x)|-1\right|=\frac{1}{2}$ admet 8 solutions.

Commentaires

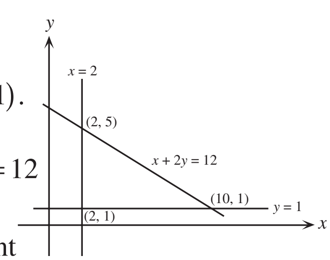
Cette question a permis aux élèves de mettre à l'épreuve leurs connaissances de la valeur absolue dans le contexte d'une représentation graphique. Certains élèves ont choisi une approche graphique pour déterminer le graphique requis à partir de la transposition du premier graphique. En fait, plusieurs élèves ont eu recours à cette méthode de résolution pour trouver les valeurs possibles de $g(x)$ ou $|g(x)|$; ils ont ensuite déterminer le nombre de solutions appropriées à partir des informations du graphique. Les élèves qui ont tenté de déterminer l'équation de la courbe ont en général éprouvé des difficultés au niveau des calculs.

Moyenne: 2,0

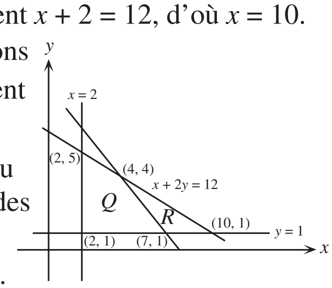
Partie B

1. *Solution*

a) Les droites définies par $x=2$ et $y=1$ se coupent au point $(2,1)$. Les droites définies par $x=2$ et $x+2y=12$ se coupent au point $(2,5)$, car en reportant $x=2$ dans $x+2y=12$, on obtient $2+2y=12$, d'où $y=5$. Les droites définies par $y=1$ et $x+2y=12$ se coupent au point $(10,1)$, car en reportant $y=1$ dans $x+2y=12$, on obtient $x+2=12$, d'où $x=10$.



b) Les droites d'équations $x+y=8$ et se coupent au point $(2,6)$. Ce point est au-dessus du point d'intersection des droites d'équations $x=2$ et $x+2y=12$.



Therefore, the vertices of Q are $(2,1)$, $(2,5)$, $(4,4)$, $(7,1)$.

(c) Area of Q = Area of T − Area of R

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{2}(8)(4) - \tfrac{1}{2}(3)(3) \\ &= 16 - \tfrac{9}{2} \\ &= \tfrac{23}{2} \end{aligned}$$

Comments

This question was exceptionally well done. Students either approached this strictly graphically or with a combination of graphical and analytic approaches. In either case, they tended to do very well. Part (c) was quite well done. Students managed to determine one of the many ways to calculate the area of Q, either by subtracting the area of R from the area of T, by breaking Q up into two triangles, or by breaking Q up into one rectangle and two triangles.

Average: 8.4

2. (a) *Solution 1*

We define a "losing position" to be a number of cards, such that if a player receives this number of cards at the beginning of his or her turn, he or she is guaranteed to lose assuming best play by both players. A "winning position" is defined similarly.

Clearly, by the rules of the game, 1 is a losing position.

For a player to receive 1 card at the beginning of a turn, the previous player must start with 2 cards. (This is true since a player can never remove more than half of the deck, so the number of cards at the beginning of the previous turn can never be more than double that of the current turn.) Therefore, 2 is a winning position, since a player starting with 2 cards can only remove 1, and so passes 1 card to the other player, who loses.

Is 3 a winning position or a losing position?

Given a pack of 3 cards, the rules of the game say that a player can only remove 1 card, and so pass a pack of 2 cards (a winning position) to the other player. Therefore, 3 is a losing position.

We can then see that 4, 5 and 6 are all winning positions, as given 4, 5 or 6 cards, a player can remove 1, 2 or 3 cards respectively to pass the other player 3 cards, a losing position.

Les droites d'équations $x + y = 8$ ett $y = 1$ se coupent au point $(7,1)$.

Pour déterminer le point d'intersection des droites définies par $x + y = 8$ et $x + 2y = 12$, on soustrait la première équation de la deuxième, membre par membre, pour obtenir $y = 4$, d'où $x = 4$.

Les coordonnées du quadrilatère Q sont $(2,1), (2,5)$, $(4,4)$ et $(7,1)$.

c) Aire de Q = Aire de T – Aire de R

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{2}(8)(4) - \tfrac{1}{2}(3)(3) \\ &= 16 - \tfrac{9}{2} \\ &= \tfrac{23}{2} \end{aligned}$$

Commentaires

Les élèves ont exceptionnellement bien réussi cette question peu importe la méthode de résolution utilisée. Des élèves ont ainsi choisi la méthode de résolution graphique tandis que d'autres ont opté pour un agencement des méthodes graphique et analytique. Ils ont tout particulièrement bien réussi la partie (c). Ils ont trouvé l'une des nombreuses façons de déterminer l'aire de Q, soit en soustrayant l'aire de R de celle de T, ou en divisant Q en deux triangles ou encore en un rectangle et deux triangles.

Moyenne: 8,4

2. a) *Solution 1*

On définit une « position perdante » comme étant un nombre de cartes qu'un joueur ou une joueuse reçoit au début de son tour et qui lui assure une défaite si les deux adversaires jouent à leur meilleur. On définit une « position gagnante » de façon semblable.

Selon les règles du jeu, 1 est une position perdante.

Pour qu'un joueur reçoive 1 carte au début de son tour, le joueur précédent doit commencer avec 2 cartes. (Un joueur ne peut retirer plus de la moitié des cartes, donc le nombre de cartes qu'il reçoit ne peut être supérieur au double du nombre de cartes remises au joueur suivant.)

Donc 2 est une position gagnante, puisqu'un joueur qui reçoit 2 cartes peut seulement en enlever une et il remet 1 carte à l'adversaire qui perd.

Est-ce que 3 est une position gagnante ou perdante?

Si on reçoit 3 cartes, on peut seulement retirer une carte du jeu et on remet 2 cartes à l'adversaire qui reçoit une position gagnante. Donc 3 est une position perdante.

On peut constater que 4, 5 et 6 sont des positions gagnantes, car on peut retirer respectivement 1, 2 ou 3 cartes et remettre 3 cartes à l'adversaire qui reçoit alors une position perdante. On constate que 7 est une position perdante, car on doit retirer 1, 2 ou 3 cartes et on remet respectivement 6, 5 ou 4 cartes à l'adversaire qui reçoit à chaque fois une position gagnante.

Therefore, 7 is a *losing* position, since a player removing 7 cards must remove 1, 2 or 3 cards, thus giving the other player 6, 5 or 4 cards respectively, any of which is a winning position. So if Alphonse starts with 7 cards, Beryl can always win.

Summary of Beryl's Strategy

- She will receive 4, 5 or 6 cards from Alphonse.
- Remove 1, 2 or 3 cards in order to pass 3 cards back to Alphonse.
- Alphonse is forced to remove 1 only, and pass back 2 to Beryl.
- Beryl removes 1 and passes 1 back, so Alphonse loses.

Solution 2 (Sufficient for full marks)

Alphonse starts with 7 cards, and so can remove 1, 2 or 3 cards, passing 6, 5 or 4 cards to Beryl.
Beryl should remove 3, 2 or 1 cards respectively, leaving 3 cards only, and pass these 3 cards back to Alphonse.
Alphonse now is forced to remove 1 card only, and pass 2 back to Beryl.
Beryl removes 1 card (her only option) and passes 1 back to Alphonse, who thus loses.
Therefore, Beryl is guaranteed to win.

(b) *Solution 1*

We must determine if 52 is a winning position or a losing position. By a similar argument to above, since 7 is a losing position, 8 through 14 are all winning positions, since they can all be reduced to 7 in one turn. Therefore, 15 is a losing position, since given 15 cards, a player is forced to reduce to some number between 8 and 14, since no more than 7 cards can be removed.

Similarly, 16 through 30 are winning positions, 31 is a losing position, and 32 through 62 are winning positions.
Therefore, 52 is a winning position, so Alphonse has a winning strategy.

Summary of Alphonse's strategy

- Alphonse removes 21 cards from original 52, and pass 31 cards to Beryl.
- If Beryl removes b_1 cards with $1 \le b_1 \le 15$, Alphonse removes $16 - b_1$ cards to reduce the pack to 15 cards. [Notice that this is always a legal move, since $2(16 - b_1) = 32 - 2b_1 \le 31 - b_1$, so $16 - b_1$ is never more than half of the pack.]

Si Alain reçoit 7 cartes, Brigitte peut donc toujours gagner.

Résumé de la stratégie de Brigitte

- Elle recevra 4, 5 ou 6 cartes d'Alain.
- Elle retirera 1, 2 ou 3 cartes de manière à remettre 3 cartes à Alain.
- Alain est forcé à retirer 1 carte et à remettre 2 cartes à Brigitte.
- Brigitte retire 1 carte et remet 1 carte à Alain qui perd.

Solution 2 (suffisante pour recevoir le maximum de points)

Alain reçoit 7 cartes et il peut retirer 1, 2 ou 3 cartes pour remettre 6, 5 ou 4 cartes à Brigitte.
Brigitte doit retirer 3, 2 ou 1 carte de manière à remettre 3 cartes à Alain.
Alain est forcé à retirer 1 carte et à remettre 2 cartes à Brigitte.
Brigitte retire 1 carte, (elle n'a pas d'autre choix) et elle remet 1 carte à Alain qui perd.
Brigitte a donc une stratégie gagnante.

b) *Solution 1*

On doit déterminer si 52 est une position gagnante ou perdante.
Comme dans la partie précédente, on peut démontrer que 8, 9, 10, …, 14 sont des positions gagnantes, puisqu'on peut retirer suffisamment de cartes pour remettre 7 cartes à l'adversaire qui reçoit alors une position perdante.
Donc 15 est une position perdante, puisqu'en recevant 15 cartes, on doit remettre de 8 à 14 cartes à l'adversaire qui reçoit alors des positions gagnantes.

De la même manière, les nombres de 16 à 30 sont des positions gagnantes, 31 est une position perdante et les nombres de 32 à 62 sont des positions gagnantes.

Donc 52 est une position gagnante. Alain peut donc utiliser une stratégie gagnante.

Résumé de la stratégie d'Alain

- Alain retire 21 cartes du jeu de 52 cartes et remet 31 cartes à Brigitte.
- Si Brigitte retire b_1 cartes, $1 \le b_1 \le 15$, Alain retire alors $16 - b_1$ cartes et remet 15 cartes à Brigitte. [On remarque que c'est toujours permis, car $2(16 - b_1) = 32 - 2b_1 \le 31 - b_1$ et $16 - b_1$ n'est jamais supérieur à la moitié du nombre de cartes reçues.]
- Si Brigitte retire b_2 cartes, $1 \le b_2 \le 7$, retire alors $8 - b_2$ cartes et remet 7 cartes à Brigitte. [Ce nombre est toujours permis selon un argument semblable.]
- Alain adopte maintenant la même stratégie que Brigitte dans la partie a).

- If Beryl removes b_2 cards with $1 \le b_2 \le 7$, Alphonse removes $8 - b_2$ to reduce the pack to 7 cards. [This move is always legal by a similar argument.]
- Beryl now has 7 cards, so Alphonse should adopt Beryl's strategy from (a).

Solution 2
Alphonse removes 21 cards from original 52, and passes 31 cards to Beryl.

If Beryl removes b_1 cards with $1 \le b_1 \le 15$, Alphonse removes $16 - b_1$ cards to reduce the pack to 15 cards. [This is always a legal move, since $2(16 - b_1) = 32 - 2b_1 \le 31 - b_1$, so $16 - b_1$ is never more than half of the pack.]

If Beryl removes b_2 cards with $1 \le b_2 \le 7$, Alphonse removes $8 - b_2$ to reduce the pack to 7 cards. [This move is always legal by a similar argument.]

Beryl now has 7 cards, so Alphonse should adopt Beryl's strategy from (a), so Alphonse has a winning strategy.

Comments
The "Alphonse and Beryl" questions continue to be a highlight of the COMC. Part (a) met with a good degree of success. Most students quickly realized that the position of 3 cards was the important one on which to focus. Part (b) did not meet with as much success – many students thought that the strategy had something to do with parity (ie. even or odd numbers of cards) or with a "matching" strategy (if Beryl takes 5 cards, Alphonse should take 5 cards). Competitors should have a look at the solution and then try playing the game with an unsuspecting friend!
Average: 4.0

3. (a) *Solution*
Calculating,
$$f(0) + f(-1) = c + (1 - 6 + c) \\ = 2c - 5$$
Now $2c$ is always even for c an integer, so $2c - 5$ is always odd.

(b) *Solution 1*
Assume that $g(x) = 0$ has three integer roots a, b, c, ie.
$$g(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 + px^2 + qx + r.$$
Now $g(0) = -abc$ from the above and is odd, so each of a, b and c must be odd for their product to be odd.

Solution 2
Alain retire 21 cartes du jeu de 52 cartes et remet 31 cartes à Brigitte.

Si Brigitte retire b_1 cartes, $1 \le b_1 \le 15$, Alain retire alors $16 - b_1$ cartes et remet 15 cartes à Brigitte. [On remarque que c'est toujours permis, car $2(16 - b_1) = 32 - 2b_1 \le 31 - b_1$ et $16 - b_1$ n'est jamais supérieur à la moitié du nombre de cartes reçues.]

Si Brigitte retire b_2 cartes, $1 \le b_2 \le 7$, retire alors $8 - b_2$ cartes et remet 7 cartes à Brigitte. [Ce nombre est toujours permis selon un argument semblable.]

Alain adopte maintenant la même stratégie que Brigitte dans la partie a). Il a donc une stratégie gagnante.

Commentaires
Les questions pertinentes à « Alphonse et Beryl » demeurent sans contredit un des points marquants du concours du Défi ouvert canadien de mathématiques (DOCM). Les élèves ont bien réussi la partie (a). La plupart ont rapidement compris que la position des trois cartes constituait l'aspect essentiel du problème. Les élèves ont cependant éprouvé des difficultés à la partie (b) où bon nombre ont supposé que la méthode de résolution était liée au nombre égal de cartes paires et impaires ou à la correspondance du nombre de cartes (si Beryl prend cinq cartes Alphonse devrait faire de même). Les concurrents devraient lire la solution puis inviter un camarade à se laisser prendre au jeu!
Moyenne: 4,0

3. a) *Solution*
$$f(0) + f(-1) = c + (1 - 6 + c) \\ = 2c - 5$$
Puisque c est un entier, 2c est toujours pair et $2c - 5$ est donc toujours impair.

b) *Solution 1*
Supposons que l'équation $g(x) = 0$ admet trois racines entières, a, b et c.
Donc $g(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 + px^2 + qx + r$.
Donc $g(0) = -abc$ et puisque $g(0)$ est impair, alors chacune des racines doit être impaire pour que leur produit soit impair.
On a $g(-1) = (-1-a)(-1-b)(-1-c)$.
Puisque a, b et c sont impairs, alors $-1-a$, $-1-b$ et $-1-c$ sont pairs et $g(-1)$ est donc pair, ce qui est une contradiction.
Donc l'équation $g(x) = 0$ ne peut admettre trois racines entières.

Therefore, $g(-1)=(-1-a)(-1-b)(-1-c)$.
Since a is odd, $-1-a$ is even, and so $g(-1)$ is even, a contradiction. (In fact, $g(-1)$ is divisible by 8.)
Thus, $g(x)=0$ cannot have three integer roots.

Solution 2
Assume that $g(x)=0$ has three integer roots a, b, c, ie. $g(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3+px^2+qx+r$
or, expanding,

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc = x^3+px^2+qx+r$$

Now $g(0)=r$ so r is odd, and
$g(-1)=-1+p-q+r$, which is odd.
Combining these, since r is odd, then $p-q$ is odd too.
Therefore, one of p and q is even (they cannot both be odd, since odd – odd = even).
Since r is odd and $r=-abc$, then each of a, b and c is odd. This implies that

$$p=-(a+b+c)$$
$$q=ab+ac+bc$$

are both odd, a contradiction (since we have shown above that one of p and q must be even.)
Therefore, $g(x)=0$ cannot have three integer roots.

Comments
The purpose of part (a) was to have a relatively straightforward "proof" question, which required students to write a logical argument. In general, students did exceptionally well on (a). Part (b) was a fair bit more difficult. Many students recognized that r had to be odd and then that one of p and q is even and the other odd, but were then stuck. A few students ingeniously pointed out that not only can this cubic equation not have 3 integer roots, it cannot even have 1 integer root, as they showed with the following proof:
Suppose that q and r are both odd and p even.
Let a be an integer root of $x^3+px^2+qx+r=0$, ie. $a^3+pa^2+qa+r=0$.
If a is even, then a^3, pa^2, and qa are all even, and r is odd, so a^3+pa^2+qa+r is odd and so cannot be 0.
If a is odd, then a^3, qa, and r are all odd, and is even (since p is even), so a^3+pa^2+qa+r is odd and so cannot be 0.
Therefore, there cannot be any integer roots.
(A similar argument works for p odd and q even.)
Congratulations to those students who had this brilliant insight!
Average: 4.0

Solution 2
Supposons que l'équation $g(x)=0$ admet trois racines entières, a, b et c.
Donc
$g(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3+px^2+qx+r$.
On développe pour obtenir :

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc = x^3+px^2+qx+r$$

Puisque $g(0)$ et $g(-1)$ sont impairs, et que $g(0)=r$ et $g(-1)=-1+p-q+r$ alors r et $-1+p-q+r$ sont impairs.
Donc $p-q$ est impair.
Donc p ou q doit être pair (ils ne peuvent être impairs tous les deux, car leur différence serait paire).

Puisque r est impair et que $r=-abc$, alors a, b et c sont tous impairs. Donc les nombres

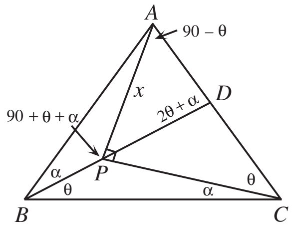
$$p=-(a+b+c)$$
$$q=ab+ac+bc$$

sont impairs tous les deux, ce qui est une contradiction car on vient de conclure que p ou q doit être pair.
Donc l'équation $g(x)=0$ ne peut admettre trois racines entières.

Commentaires
Les élèves ont généralement très bien réussi la partie (a) où il fallait résoudre une question au moyen d'un raisonnement logique, mais ont éprouvé davantage de difficultés avec la partie (b). De nombreux élèves ont compris que r était impair et que de p et q l'un devait être pair et l'autre impair sans toutefois aller plus loin dans la résolution du problème. Quelques élèves ingénieux ont indiqué que l'équation cubique ne pouvait avoir trois racines entières ni même une comme le démontre le raisonnement suivant :

Supposons que q et r sont tous deux pairs et que p est impair.
Soit a est une racine entière de l'équation
$x^3+px^2+qx+r=0$, c'est-à-dire
$a^3+pa^2+qa+r=0$.
Si a est impair, alors a^3, pa^2 et qa sont tous pairs, et r est impair, a^3+pa^2+qa+r a pour solution un nombre impair autre que 0.
Si a est impair, alors a^3, qa et r sont tous impairs et pa^2 est impair (puisque p est impair, alors a^3+pa^2+qa+r a pour solution un nombre pair autre que 0).

4. *Solution 1 (Trigonometry)*



Let $\angle BCP = \angle ABP = \alpha$ and $\angle ACP = \theta$.
Then $\angle PBC = \theta$ since ΔABC is isosceles. Also, $\angle PAC = 90^\circ - \theta$ (from ΔAPC), $\angle ADP = 2\theta + \alpha$ (exterior angle), and $\angle APB = 90^\circ + \theta + \alpha$ (exterior angle).
Let $AP = x$. Then from ΔAPC,

$$\sin\theta = \frac{x}{AC} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 5\sin\theta \qquad (*)$$

By the sine law in ΔABP,

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin\left(90^\circ + \theta + \alpha\right)} = \frac{5}{\cos(\theta+\alpha)} = \frac{5}{\cos(\angle ABC)} = \frac{5}{\frac{3}{5}}$$

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{25}{3} \qquad (**)$$

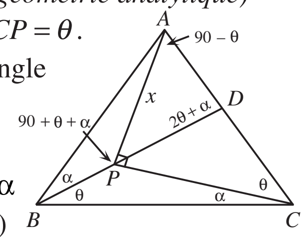
[Note that $\cos(\angle ABC) = \frac{3}{5}$ since drawing a perpendicular from A bisects BC. Also, $\sin(\angle ABC) = \frac{4}{5}$.]
Therefore combining (*) and (**)

$$\frac{5\sin\theta}{\sin\alpha} = \frac{25}{3}$$
$$3\sin\theta = 5\sin\alpha$$
$$3\sin\theta = 5\sin(\angle ABC - \theta)$$
$$3\sin\theta = 5\sin(\angle ABC)\cos\theta - 5\cos(\angle ABC)\sin\theta$$
$$3\sin\theta = 4\cos\theta - 3\sin\theta$$
$$6\sin\theta = 4\cos\theta$$
$$\tan\theta = \tfrac{2}{3}$$

To determine the ratio of AD to DC, we use coordinates. Let B have coordinates $(0,0)$ and C have coordinates $(6,0)$. Thus, A has coordinates $(3,4)$, since the altitude from A to BC has length 4.
Since $\tan\theta = \frac{2}{3}$, the line from B to D has equation $y = \frac{2}{3}x$. Also, the line from A to C has equation $y = -\frac{4}{3}(x-6)$. To find D, we find the intersection of these two lines:

Par conséquent, il n'existe pas de racine entière.
(Le raisonnement semblable voulant que p soit impair et q pair est également valable.)
Félicitations aux élèves qui sont arrivés à cette brillante déduction!
Moyenne: 4,0

4. *Solution 1 (par trigonométrie et géométrie analytique)*



Soit $\angle BCP = \angle ABP = \alpha$ et $\angle ACP = \theta$.
Donc $\angle PBC = \theta$, puisque le triangle ABC est isocèle.
Dans le triangle APC,
$\angle PAC = 90^\circ - \theta$. $\angle ADP = 2\theta + \alpha$ (angle extérieur du triangle BCD)
$\angle APB = 90^\circ + \theta + \alpha$ (angle extérieur du triangle ADP)

Soit $AP = x$. Dans le triangle APC, on a $\sin\theta = \dfrac{x}{AC} = \dfrac{x}{5}$, d'où $x = 5\sin\theta$ (*).

D'après la loi des sinus dans le triangle ABP :

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin\left(90^\circ + \theta + \alpha\right)} = \frac{5}{\cos(\theta+\alpha)} = \frac{5}{\cos(\angle ABC)} = \frac{5}{\frac{3}{5}}$$

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{25}{3} \qquad (**)$$

[On remarque que $\cos(\angle ABC) = \frac{3}{5}$, car la hauteur au point A est aussi la médiatrice de BC. On a aussi $\sin(\angle ABC) = \frac{4}{5}$.]
On utilise (*) et (**) pour obtenir :

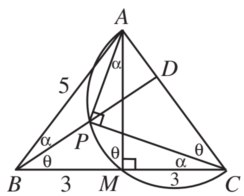
$$\frac{5\sin\theta}{\sin\alpha} = \frac{25}{3}$$
$$3\sin\theta = 5\sin\alpha$$
$$3\sin\theta = 5\sin(\angle ABC - \theta)$$
$$3\sin\theta = 5\sin(\angle ABC)\cos\theta - 5\cos(\angle ABC)\sin\theta$$
$$3\sin\theta = 4\cos\theta - 3\sin\theta$$
$$6\sin\theta = 4\cos\theta$$
$$\tan\theta = \tfrac{2}{3}$$

Pour déterminer le rapport de AD à DC, on utilise un repère cartésien.
Soit $(0,0)$ les coordonnées du point B et $(6,0)$ les coordonnées du point C. Les coordonnées du point A sont (3, 4), puisque la hauteur de A à BC a une longueur de 4. Puisque $\tan\theta = \frac{2}{3}$,

$$\tfrac{2}{3}x = -\tfrac{4}{3}x + 8$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

Therefore, D has coordinates $\left(4, \tfrac{8}{3}\right)$. Since the x-coordinate of D is $\tfrac{1}{3}$ of the way between those of A and C, then $AD : DC = 1 : 2$.

Solution 2 (Similar triangles)



Draw a perpendicular from A to meet BC at M. Then since $AB = AC$, $BM = MC = 3$ and so $AM = 4$.

Let $\angle BCP = \angle ABP = \alpha$ and $\angle ACP = \theta$. Then $\angle PBC = \theta$ since ΔABC is isosceles.

Draw circle with AC has diameter. This circle passes through both P and M, since $\angle APC = \angle AMC = 90^\circ$.

Join P to M. Then $\angle PAM = \alpha$ since $\angle PAM = \angle PCM$ (subtended by the same chord). Also, $\angle AMP = \theta$ for similar reasons. Therefore, ΔMPA is similar to ΔBPC. Thus,

$$\frac{PA}{PC} = \frac{MA}{BC} = \frac{4}{6} \Rightarrow \tan\theta = \frac{PA}{PC} = \frac{2}{3}$$

So now we must compute the length of DC. Consider ΔBDC. By the sine law,

$$\begin{aligned}
\frac{DC}{\sin\theta} &= \frac{BC}{\sin(\angle BDC)} \\
DC &= \frac{6\sin\theta}{\sin\left(180^\circ - \theta - \angle DCB\right)} \\
&= \frac{6\sin\theta}{\sin(\theta + \angle DCB)} \\
&= \frac{6\sin\theta}{\sin\theta\cos(\angle DCB) + \cos\theta\sin(\angle DCB)} \\
&= \frac{6}{\cos(\angle DCB) + \cot\theta\sin(\angle DCB)} \\
&= \frac{6}{\frac{3}{5} + \frac{3}{2}\left(\frac{4}{5}\right)} \\
&= \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

which yields also that $AD = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$ and so $AD : DC = 1 : 2$.

la droite qui passe par B et D a pour équation $y = \tfrac{2}{3}x$. De plus, la droite qui passe par A et C a pour équation $y = -\tfrac{4}{3}(x - 6)$. Le point D est le point d'intersection de ces deux droites. Donc :

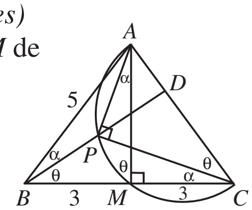
$$\tfrac{2}{3}x = -\tfrac{4}{3}x + 8$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

Les coordonnées de D sont donc $\left(4, \tfrac{8}{3}\right)$.

On compare les déplacements horizontaux de A à D et de D à C : $\dfrac{4-3}{6-4} = \dfrac{1}{2}$

Donc $AD : DC = 1 : 2$.

Solution 2 (par triangles semblables)



On abaisse une perpendiculaire AM de A à BC. Puisque $AB = AC$, alors $BM = MC = 3$, d'où $AM = 4$.

Soit $\angle BCP = \angle ABP = \alpha$ et $\angle ACP = \theta$. Donc $\angle PBC = \theta$, puisque le triangle ABC est isocèle.

On trace un cercle ayant AC pour diamètre. Ce cercle passe aux points P et M, puisque $\angle APC = \angle AMC = 90^\circ$.

On joint P et M. Donc $\angle PAM = \alpha$, puisque $\angle PAM = \angle PCM$ (ces angles interceptent le même arc). De même, $\angle AMP = \theta$. Les triangles MPA et BPC sont donc semblables.

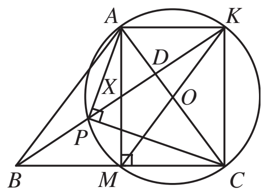
Donc $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{MA}{BC} = \dfrac{4}{6}$, d'où $\tan\theta = \dfrac{PA}{PC} = \dfrac{2}{3}$.

On cherche maintenant à déterminer DC. Selon la loi des sinus dans le triangle BDC :

$$\begin{aligned}
\frac{DC}{\sin\theta} &= \frac{BC}{\sin(\angle BDC)} \\
DC &= \frac{6\sin\theta}{\sin\left(180^\circ - \theta - \angle DCB\right)} \\
&= \frac{6\sin\theta}{\sin(\theta + \angle DCB)} \\
&= \frac{6\sin\theta}{\sin\theta\cos(\angle DCB) + \cos\theta\sin(\angle DCB)} \\
&= \frac{6}{\cos(\angle DCB) + \cot\theta\sin(\angle DCB)} \\
&= \frac{6}{\frac{3}{5} + \frac{3}{2}\left(\frac{4}{5}\right)} \\
&= \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

Donc $AD = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$, d'où $AD : DC = 1 : 2$.

Solution 3 (Geometry)



Draw a line from A perpendicular to BC at M.
Let O be the midpoint of AC.
Draw circle with centre O and radius OC.
Then this circle passes through A (since $AO = OC$), P and M (since $\angle APC = \angle AMC = 90^\circ$).
Join M to O and extend this line segment to meet the circle at K.
Since $CO = \frac{1}{2}CA$ and $CM = \frac{1}{2}CB$, then MK is parallel to BA.
Extend BD to meet MK at K'.
Then $\angle MK'B = \angle ABK'$ because of parallel lines.
But $\angle ABK' = \angle ABP = \angle BCP \Rightarrow \angle MK'P = \angle MCP$.
Therefore, K' lies on the circle; that is, K' coincides with K.

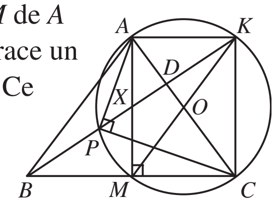
Next, join A to K and K to C.
Then $AKCM$ is a rectangle, since KM and AC are diameters of the circle, so the quadrilateral has four right angles.
Therefore, $AK = MC = BM$.
Then $AKMB$ is a parallelogram, which implies that AM and BK bisect each other (meeting at X).

Consider now ΔAKM. Then KX and AO are medians, and so intersect in the ratio $2:1$, ie. $AD : DO = 2:1$. Since $AO : OC = 1:1$, then $AD : DC = 1:2$.

Comments

This question was extremely difficult, but it was gratifying to see many students at least making an effort to start the question. The first step was to determine some of the angles in the diagram, which was relatively straightforward. The second step of recognizing the presence of a circle and then finding similar triangles required a great deal of insight. Of the three solutions presented, the second is probably the nicest. The first solution requires less insight, but is more difficult computationally.
Average: 0.3

Solution 3 (par géométrie)



On abaisse une perpendiculaire AM de A à BC. Soit O le milieu de AC. On trace un cercle de centre O et de rayon OC. Ce cercle passe au point A, puisque $AO = OC$, et aux points P et M, puisque $\angle APC = \angle AMC = 90^\circ$.
On joint M et O et on prolonge le segment obtenu jusqu'au cercle au point K.
Puisque $CO = \frac{1}{2}CA$ et $CM = \frac{1}{2}CB$, alors MK est parallèle à BA. On prolonge BD jusqu'à MK au point K'.
Donc $\angle MK'B = \angle ABK'$ à cause des segments parallèles.
Or $\angle ABK' = \angle ABP = \angle BCP$, d'où $\angle MK'P = \angle MCP$.
Donc K' est situé sur le cercle, ce qui indique que K' et K coïncident.
On joint A et K, ainsi que K et C.
Puisque KM et AC sont des diamètres du cercle, le quadrilatère $AKCM$ est un rectangle.
Donc $AK = MC = BM$.
Donc $AKMB$ est un parallélogramme. Donc AM et BK se coupent en leur milieu au point X.
On considère maintenant le triangle AKM. KX et AO sont des médianes de ce triangle. Elles se coupent donc dans le rapport 2:1. Donc $AD : DO = 2:1$. Puisque $AO : OC = 1:1$, alors $AD : DC = 1:2$.

Commentaires

Nous nous réjouissons des tentatives de bon nombre d'élèves à résoudre cette question d'un haut niveau de difficulté. Dans un premier temps, il fallait déterminer la valeur de quelques angles du diagramme, une étape somme toute simple. Dans un deuxième temps, il fallait discerner la présence d'un cercle, puis trouver des triangles semblables par une approche déductive complexe. Parmi les trois solutions données par les élèves, la seconde comportait sans doute les éléments les plus intéressants tandis que la première nécessitait un raisonnement moins complexe mais davantage de calculs difficiles.
Moyenne: 0,3