Olympiade mathématique du Canada 2020

Solutions officielles

1. Soit S un ensemble composé de $n \geq 3$ nombres réels positifs. Montrer qu'il existe au plus $n-2$ nombres qui sont à la fois des puissances entières de trois et qui s'écrivent comme la somme de trois éléments de S.

Solution.

Pour montrer qu'il existe au plus $n-2$ nombres qui sont des puissances entières de trois, égale à la somme de trois éléments de S, où $|S| = n$, on procède par récurrence sur n, $n \geq 3$.

Pour $n = 3$, il y a une seule somme de trois elements de S qu'on peut former, et qui pourra être une puissance entière de trois, donc la propriété est vraie pour la première valeur de n.

Supposons que la propriété est vraie pour un $n \geq 3$ quelconque, donc, pour tout ensemble S des nombres réels positifs, où $|S| = n$, il existe au plus $n-2$ puissances entiéres de trois, somme des trois éléments distinctes de S. On va montrer que la propriété est vraie pour tout ensemble S' avec $n+1$ éléments comme dans l'énoncé.

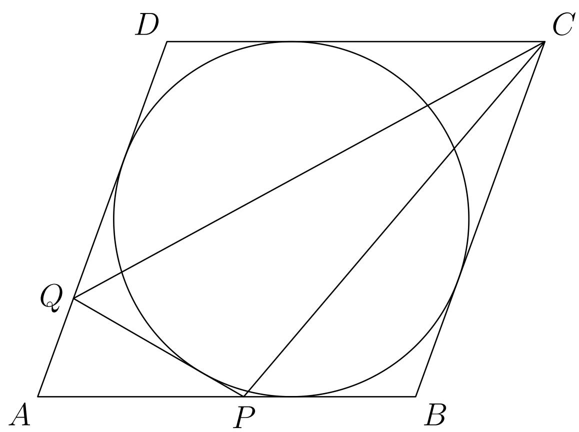
Soit S' un ensemble avec $n+1$ éléments, nombres reels positifs, and soit x son élément de valeur maximale. L'ensemble $S \setminus \{x\}$ a n éléments et donc satisfait la propriété. La somme de x avec n'importe quels deux autres éléments de S est strictement entre x et $3x$, donc x peut former une seule puissance entière de trois. Alors, au total, S' peut avoir au plus $(n-2)+1$ puissances entières de trois, ce qui conclut la récurrence.

L'énoncé ne le demande pas, mais nous allons montrer également que la borne $n-2$ est atteinte. Observer que l'ensemble $S = \{1, 2, 3^2 - 3, 3^3 - 3, \ldots, 3^n - 3\}$ est tel que $3^2, 3^3, \ldots, 3^n$ sont des sommes des trois éléments distincts de S telle que chaque nombre de forme $3^k - 3$ est utilisé exactement une fois pour former la somme égale à 3^k.

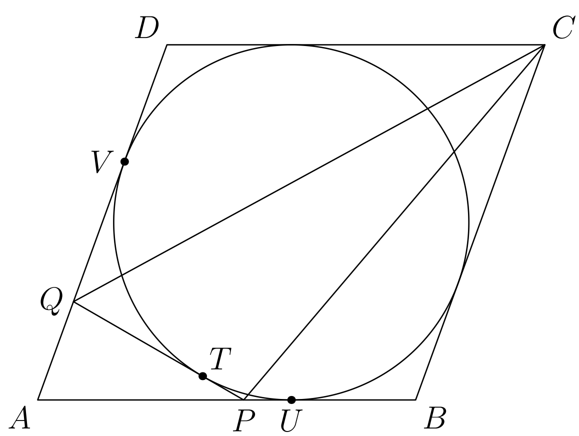
$\square$

Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

2. Un cercle est inscrit dans un losange $ABCD$. Les points P et Q varient sur les segments $\overline{AB}$ et $\overline{AD}$, respectivement, de sorte que le segment $\overline{PQ}$ est tangent au cercle. Montrer que pour tout segment $\overline{PQ}$, l'aire du triangle CPQ est constante.



Solution. Soient T, U, et V les points de tangence au cercle sur $\overline{PQ}$, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, respectivement. Soit $p = PT = PU$ et $q = QT = QV$, ainsi que $a = AU = AV$ et $b = BU = DV$. Alors, le côté du losange est de longueur $a + b$.



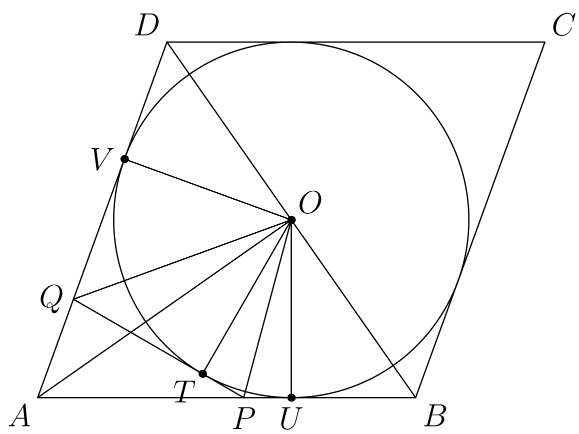
Soit $\theta = \angle BAD$, donc $\angle ABC = \angle ADC = 180° - \theta$. Alors (si on note par [XYZ] l'aire du triangle avec sommets X, Y, Z), nous avons

$$[APQ] = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AQ \cdot \sin\theta = \frac{1}{2}(a-p)(a-q)\sin\theta,$$
$$[BCP] = \frac{1}{2} \cdot BP \cdot BC \cdot \sin(180° - \theta) = \frac{1}{2}(b+p)(a+b)\sin\theta,$$
$$[CDQ] = \frac{1}{2} \cdot DQ \cdot CD \cdot \sin(180° - \theta) = \frac{1}{2}(b+q)(a+b)\sin\theta,$$

et, donc,

$$\begin{aligned}
[CPQ] &= [ABCD] - [APQ] - [BCP] - [CDQ] \\
&= (a+b)^2 \sin\theta - \frac{1}{2}(a-p)(a-q)\sin\theta - \frac{1}{2}(b+p)(a+b)\sin\theta - \frac{1}{2}(b+q)(a+b)\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}(a^2 + 2ab - bp - bq - pq)\sin\theta.
\end{aligned}$$

Soit O le centre du cercle, et soit r le rayon du cercle. Si $x = \angle TOP = \angle UOP$ et $y = \angle TOQ = \angle VOQ$, alors $\tan x = \frac{p}{r}$ et $\tan y = \frac{q}{r}$.



On voit que $\angle UOV = 2x + 2y$, et $\angle AOU = x + y$. Alors, $\angle AOB = 90°$, et $\angle OBU = x + y$. En conséquence,

$$\tan(x+y) = \frac{a}{r} = \frac{r}{b},$$

et $r^2 = ab$. D'autre part,

$$\frac{r}{b} = \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{p}{r} + \frac{q}{r}}{1 - \frac{p}{r} \cdot \frac{q}{r}} = \frac{r(p+q)}{r^2 - pq} = \frac{r(p+q)}{ab - pq}.$$

Donc, $ab - pq = bp + bq$, et $bp + bq + pq = ab$. Finalement, on déduit que l'aire

$$[CPQ] = \frac{1}{2}(a^2 + 2ab - bp - bq - pq)\sin\theta = \frac{1}{2}(a^2 + ab)\sin\theta,$$

est constante.

Deuxième solution : Soit O le centre du cercle et soit r son rayon. Alors $[CPQ] = [CDQPB] - [CDQ] - [CBP]$, où [...] note l'aire du polygône avec les sommets indiqués entre les paranthèses. On voit que $[CDQPB]$ est la moitié du produit entre r et le perimètre du polygône $CDQPB$. Comme les hauteurs des triangles CDP et CBP sont égales à $2r$, on a que les aires $[CDQ] = r \cdot DQ$ et $[CBP] = r \cdot PB$. En utilisant que $QT = QV$ et $PU = PT$, il suit que l'aire $[CPQ] = [OVDCBU] - [CDV] - [CBU]$ est indépendante de la position des points P et Q.

$\square$

3. Une bourse contient un nombre fini de pièces de monnaie. Chaque pièce a une valeur entière différente de celles des autres pièces. Est-il possible qu'il y ait exactement 2020 façons de choisir des pièces de cette bourse afin d'avoir la valeur de 2020 ?

Solution : Oui, c'est possible.
Prennons une bourse avec des pièces de valeurs $2, 4, 8, 2014, 2016, 2018$, 2020 et tout nombre impaire entre 503 et 1517. On appelle une pièce *grande* si sa valeur est entre 503 et 1517, on l'appelle *petite* si sa valeur est de $2, 4$ ou 8 et, finalement, on l'appelle *énorme* si sa valeur est de $2014, 2016, 2018$ ou 2020.

Supposons qu'un sous-ensemble de ces pièces ne contienne aucune pièce énorme et que la somme des pièces dans le sous-ensemble est égale à 2020. Si le sous-ensemble contient au moins quatre pièces grandes, la somme doit être au moins $503+505+507+509 > 2020$. De plus, comme toutes les pièces petites ont une valeur paire, si le sous-ensemble contient exactement une ou trois pièces grandes, leur somme doit être impaire. Ainsi, le sous-ensemble doit contenir exactement deux pièces grandes. Les huit sous-ensembles possibles des petites pièces ont sommes des valeurs $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$. Il suit que les modalités d'obtenir la valeur de 2020 en n'utilisant pas des pièces énormes correspondent aux paires des pièces grandes avec des sommes $2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016, 2018$ et 2020. Le nombre de telles paires est $250, 251, 251, 252, 252, 253, 253$ ou 254, respectivement. Ainsi, il existe exactement 2016 sous-ensembles de cette bourse d'une valeur de 2020 sans utilisant des pièces énormes. Maintenant, il y a exactement quatre façons d'obtenir une valeur de 2020 en utilisant des pièces énormes, qui sont les suivantes $\{2020\}$, $\{2, 2018\}, \{4, 2016\}$ et $\{2, 4, 2014\}$. Il existe donc exactement 2020 façons d'obtenir la valeur 2020.

Deuxième solution :
Prennons les pièces de valeurs $1, 2, \ldots, 11, 1954, 1955, \ldots, 2019$. La seule modalité d'obtenir une somme de 2020 est de prendre un sous-ensemble de $\{1, \ldots, 11\}$, d'au moins une pièce, et une seule *grosse* pièce. Il y a 2047 sous-ensembles non vides avec la somme des éléments entre 1 et 66. Ainsi, ils correspondent chacun à une grosse pièce unique qui compléte la valeur jusqu'à 2020, nous avons donc 2047 modalités. Alors, il nous suffit d'éliminer quelques grosses pièces, pour éliminer exactement 27 petites sommes. Cela peut être fait, par exemple, en supprimant les pièces $2020 - n$ pour $n = 1, 5, 6, 7, 8, 9$, car elles correspondent à $1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 = 27$ partitions en nombres distincts inférieurs ou égals à 11. $\square$

4. Soit $S = \{1, 4, 8, 9, 16, \ldots\}$, l'ensemble de toutes les puissances entières d'un entier, c'est-à-dire les nombres de la forme n^k où n, k sont des entiers positifs et $k \geq 2$. On écrit $S = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\}$ avec ses éléments en ordre croissant tel que $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers m tel que 9999 divise la différence $a_{m+1} - a_m$.

Solution : On appelle les puissances entières d'un entier des puissances parfaites. L'idée principale de la preuve reste sur l'observation que la plupart des puissances parfaites sont des carrés. Si $a_n = x^2$ et $a_{n+1} = (x+1)^2$, alors $a_{n+1} - a_n = 2x + 1$. Remarquer que $9999 \mid 2x + 1$ équivaut à $x \equiv 4999 \pmod{9999}$. Par conséquence, nous aurons fini la preuve si nous pouvons montrer qu'il existe une infinité des nombres $x \equiv 4999 \pmod{9999}$ de sorte qu'il n'y a pas de puissances parfaites strictement comprises entre x^2 et $(x+1)^2$.

Supposons le contraire, de sorte qu'il existe un entier positif N tel que : pour $x \equiv 4999 \pmod{9999}$ et $x \geq N$, il y a une puissance parfaite $b_x^{e_x}$ $(e_x \geq 2)$ entre x^2 et $(x+1)^2$. Sans perte de généralité, nous pouvons considérer que N est $\equiv 4999 \pmod{9999}$. Remarquer que x^2 et $(x+1)^2$ sont des carrés consécutifs, alors e_x est impair, et donc $e_x \geq 3$. Soit t_n le nombre de puissances impaires parfaites qui sont inférieures où égales au n.

En comptant les $b_x^{e_x}$ (clairement ils sont tous distincts), pour tout $m \geq 1$, nous avons au moins m puissances impaires parfaites entre 1 et $(N + 9999m)^2$, pour que

$$t_{(N+9999m)^2} \geq m.$$

En particulier, pour n suffisamment grand, nous avons

$$t_n \geq \frac{\sqrt{n}}{10000}.$$

Maintenant, si $x^f \leq n$, on a $x \leq \sqrt[f]{n}$. De plus, $n \geq x^f \geq 2^f$ alors $f \leq \log_2(n)$ et on a

$$t_n \leq \sum_{i=3}^{\log_2(n)} \sqrt[i]{n} \leq \log_2(n) \sqrt[3]{n},$$

qui, en utilisant l'inégalité précédente, nous donne

$$\sqrt[6]{n} \leq 10000 \log_2(n)$$

pour tout n suffisamment grand. Cependant, cette inégalité est fausse pour tout n plus grand qu'un certain rank, donc on arrive à une contradiction. En conséquence, l'énoncé du problème est vrai.

$\square$

5. Il y a 19998 personnes sur un certain réseau social et chaque paire d'individus peut être ou non une paire d'*amis*. Pour tout groupe de 9999 personnes, il y a au moins 9999 paires d'entre eux qui sont amis. Quel est le plus petit nombre d'amitiés sur le réseau, c'est-à-dire, le nombre minimal de paires de personnes qui sont amis, qu'il doit y avoir parmi les 19998 personnes ?

   Solution : La réponse est $5 \cdot 9999 = 49995$. Une construction possible est la suivante : les 19998 personnes forment 3333 groupes de 6 personnes, et au sein de chaque groupe, chaque paire de personnes est une paire d'amis. Maintenant, pour tout groupe de 9999 personnes, disons qu'il y a respectivement $x_1, x_2, \ldots, x_{3333}$ personnes dans chacun des 6 groupes. Ensuite, le nombre total de paires d'amis est
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3333} x_i(x_i - 1).$$
   Mais
$$x_i(x_i - 1) \geq 5x_i - 9,$$
   alors
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3333} x_i(x_i - 1) \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3333}(5x_i - 9) = \frac{1}{2}(9999 \cdot 5 - 9 \cdot 3333) = 9999,$$
   comme il faut.

   ll reste à montrer que le nombre 49995 de paires d'amis est optimal. Pour ce qui suit, supposons que $9999 = N$, de sorte que $19998 = 2N$, et supposons que la condition est remplie. Soit le nombre de paires d'amis e. Désignez la moitié des personnes comme *rouge* et l'autre moitié comme *bleu*, de sorte que le nombre de paires d'amis qui sont toutes les deux rouges soit minimisé.

   Notez que cela signifie que pour chaque paire de personnes, une rouge et une bleue, nous avons que le nombre d'amis rouges de la personne bleue est au moins autant que le nombre d'amis rouges de la personne rouge, et l'inégalité est stricte si les deux personnes sont d'amis. (Sinon, nous pouvons échanger la couleur de ces deux personnes.) Maintenant, si chaque personne bleue est amie avec au moins 3 personnes rouges, alors le nombre total d'amitiés, e, est d'au moins $N + 3N + N = 5N$ (un N chacun pour compter les personnes rouges et bleues, et $3N$ pour les paires), comme nous le souhaitons. De plus, si une personne bleue est amie avec au plus 2 personnes rouges, alors chaque personne rouge est amie avec au plus 2 personnes rouges, donc le nombre de paires d'amis rouges est au maximum N, avec égalité seulement si chaque personne rouge est amie avec exactement 2 personnes rouges. Alors considérer une personne bleue avec 2 amis rouges ; ensuite, ils doivent avoir un ami rouge avec exactement 2 amis rouges aussi, ce qui donne une contradiction.

   $\square$

