Olympiade mathématique du Canada 2017

Financière Sun Life

Solutions officielles

1. Soient a, b et c trois nombres réels non-négatifs, deux à deux distincts. Montrer que

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}>2.$$

Solution:

Le côté gauche de l'inégalité est symétrique par rapport à a, b, c. On peut alors supposer que $a>b>c\geq 0$. Noter que si (a,b,c) est remplacé par $(a-c, b-c, 0)$, la valeur du côté gauche diminue comme pour chacune des fractions le numérateur diminue et le dénominateur reste le même. Alors pour obtenir la valeur minimale possible du côté gauche, on peut supposer que $c=0$.

Alors le côté gauche de l'inégalité devient

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2},$$

ce qui donne (par l'inégalité arithmético-géométrique) que

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2} \;\geq\; 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}} \;=\; 2,$$

où l'inégalité devient une égalité si et seulement si $a^2/b^2=b^2/a^2$, ou de manière équivalente, $a^4=b^4$. Comme $a,b\geq 0$, $a=b$. Mais comme les nombres a,b,c sont deux à deux distincts, $a\neq b$. On conclut que l'égalité n'est pas possible. Ceci implique que

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2} \;>\; 2.$$

Ceci nous donne l'inégalité voulue. $\square$

Solution alternative: Tout d'abord, on montre que

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}-2 = \frac{[a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)]^2}{[(a-b)(b-c)(c-a)]^2}.$$

L'inégalité de Schur nous donne que le numérateur du côté droit ne peut pas être zéro. $\square$

2. Soit f une fonction de l'ensemble de tous les entiers positifs dans lui-même telle que le nombre d'entiers positifs qui sont des diviseurs de n est égal à $f(f(n))$ pour tout n. Par exemple, $f(f(6)) = 4$ et $f(f(25)) = 3$. Montrer que si p est un nombre premier, alors $f(p)$ est aussi un nombre premier.

   Solution: Soit $d(n) = f(f(n))$ le nombre des diviseurs de n. Remarquer que $f(d(n)) = f(f(f(n))) = d(f(n))$ pour tout entier n. Notez également que $2 \leq d(n) < n$ pour tout $n > 2$ comme tous les diviseurs de n sont des entiers positifs distincts entre 1 et n, y compris 1 et n et excluant $n-1$ si $n > 2$. De plus $d(1) = 1$ et $d(2) = 2$.

   On commence par montrer que $f(2) = 2$. Posons $m = f(2)$ et notons que $2 = d(2) = f(f(2)) = f(m)$. Si $m \geq 2$, soit m_0 le plus petit entier positif tel que $m_0 \geq 2$ et $f(m_0) = 2$. Alors $f(d(m_0)) = d(f(m_0)) = d(2) = 2$. Par la minimalité de m_0, $d(m_0) \geq m_0$, ce qui implique que $m_0 = 2$. Alors si $m \geq 2$, on a que $f(2) = 2$. Il suffit alors d'examiner le cas où $f(2) = m = 1$. Si $m = 1$, alors $f(1) = f(f(2)) = 2$ et en plus, chaque nombre premier p satisfait $d(f(p)) = f(d(p)) = f(2) = 1$ ce qui implique que $f(p) = 1$. Par conséquent $d(f(p^2)) = f(d(p^2)) = f(3) = 1$ ce qui implique que $f(p^2) = 1$ pour tout nombre premier p. Cela implique que $3 = d(p^2) = f(f(p^2)) = f(1) = 2$, ce qui est une contradiction. Par conséquent, $m \neq 1$ et $f(2) = 2$.

   Donc, si p est un nombre premier on a que $2 = f(2) = f(d(p)) = d(f(p))$ ce qui implique que $f(p)$ est aussi un nombre premier. □

   Remarque. Une telle fonction existe et peut être construite d'une façon récursive.

3. Soit $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ où n est un entier positif. Considérer un sous-ensemble non vide T de S. On dit que T est équilibré si la médiane de T est égale à la moyenne de T. Par example, pour $n = 9$, chacun des sous-ensembles $\{7\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{5, 6, 8, 9\}$ et $\{1, 4, 5, 7, 8\}$ est équilibré. Par contre, les sous-ensembles $\{2, 4, 5\}$ et $\{1, 2, 3, 5\}$ ne sont pas équilibrés. Pour tout $n \geq 1$, montrer que le nombre de sous-ensembles équilibrés de S est impair.
   (Pour définir la médiane d'un ensemble de k nombres, on commence par arranger les nombres en ordre croissant; la médiane est le nombre au milieu si k est impair, et la moyenne des deux nombres au milieu si k est pair. Par exemple, la médiane de $\{1, 3, 4, 8, 9\}$ est 4, et la médiane de $\{1, 3, 4, 7, 8, 9\}$ est $(4 + 7)/2 = 5,5$.)

   Solution: Le problème est de montrer qu'il y a un nombre impair de sous-ensembles non vides T de S_n tels que la moyenne $A(T)$ et la médiane $M(T)$ satisfont $A(T) = M(T)$. Pour un sous-ensemble T, considérer le sous-ensemble $T^* = \{n + 1 - t : t \in T\}$. On a que $A(T^*) = n + 1 - A(T)$ et $M(T^*) = n + 1 - M(T)$, ce qui implique que si $A(T) = M(T)$ alors $A(T^*) = M(T^*)$. En appareillant chaque ensemble T avec T^* on voit qu'il existe un nombre pair d'ensembles T tels que $A(T) = M(T)$ et $T \neq T^*$.

   Il suffit alors de montrer que le nombre de sous-ensembles non vides T tels que $A(T) = M(T)$ et $T = T^*$ est impair. Noter que si $T = T^*$, alors $A(T) = M(T) = \frac{n+1}{2}$. Par conséquent, il suffit de montrer le nombre de sous-ensembles non vides T avec $T = T^*$ est impair. Étant donné un tel ensemble T, soit T' le plus grand sous-ensemble non vide de $\{1, 2, \ldots, \lceil n/2 \rceil\}$ contenu dans T. L'appareiement de T avec T' nous donne une bijection entre ces ensembles T et les sous-ensembles non vides de $\{1, 2, \ldots, \lceil n/2 \rceil\}$. Ainsi, il y a $2^{\lceil n/2 \rceil} - 1$ tels sous-ensembles, ce qui est impair comme voulu. $\square$

   Solution alternative: En utilisant les mêmes notations dans la solution précédente: Soit B le nombre de sous-ensembles T avec $M(T) > A(T)$, C le nombre des sous-ensembles T avec $M(T) = A(T)$, et D le nombre des sous-ensembles T avec $M(T) < A(T)$. Appareillant chacun des B ensembles T avec $T^* = \{n + 1 - t : t \in T\}$ montre que $B = D$. Comme $B + C + D = 2^n - 1$, on a que $C = 2^n - 1 - 2B$, qui est impair.

4. Les points P et Q sont à l'intérieur d'un parallélogramme $ABCD$ de sorte que les triangles ABP et BCQ soient équilatéraux. Montrer que la droite qui passe par P et qui est perpendiculaire à DP et la droite qui passe par Q et qui est perpendiculaire à DQ se coupent en un point sur la hauteur issue du point B dans le triangle ABC.

   Solution: Posons $\angle ABC = m$ et soit O le centre du cercle circonscrit du triangle DPQ. Comme P et Q sont à l'intérieur de $ABCD$, on a que $m = \angle ABC > 60°$ et $\angle DAB = 180° - m > 60°$ ce qui implique que $60° < m < 120°$. Noter que $\angle DAP = \angle DAB - 60° = 120° - m$, $\angle DCQ = \angle DCB - 60° = 120° - m$ et que $\angle PBQ = 60° - \angle ABQ = 60° - (\angle ABC - 60°) = 120° - m$. Ceci, avec les fait que $AD = BQ = CQ$ et $AP = BP = CD$, implique que les triangles DAP, QBP et QCD sont congrus. Alors $DP = PQ = DQ$ et le triangle DPQ est équilatéral. Ceci implique que $\angle ODA = \angle PDA + 30° = \angle DQC + 30° = \angle OQC$. En combinant ce fait avec $OQ = OD$ et $CQ = AD$, on obtient que les triangles ODA et OQC sont congrus. Alors $OA = OC$ et si M est le point milieu du segment AC, on a que OM est perpendiculaire à AC. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, M est aussi le point milieu de DB. Si K est le point d'intersection de la droite passant par P et qui est perpendiculaire à DP avec la droite passant par Q et qui est perpendiculaire à DQ, alors K est diamétralement opposé à D sur le cercle circonscrit du triangle DPQ et O est le point milieu du segment DK. Ceci implique que OM est une droite des milieux du triangle DBK et par conséquent BK est parallèle à OM qui est perpendiculaire à AC. On conclut que K est sur la hauteur issue du point B dans le triangle ABC. □

5. Cent cercles de rayon un sont positionnés dans le plan de sorte que l'aire de n'importe quel triangle formé par les centres de trois de ces cercles soit au plus 2017. Montrer qu'il existe une droite dans le plan qui coupe au moins trois de ces cercles.

   Solution: Étant donnés n cercles, on montre qu'il existe une certaine droite qui intersecte plus que $\frac{n}{46}$ de ces cercles. Soit S l'ensemble des centres des n cercles. On montre tout d'abord qu'il existe une droite ℓ telle les projections des points de S se trouvent dans un interval de longueur au plus $\sqrt{8068} < 90$ sur ℓ. Soit A et B les points de S les plus éloignés l'un de l'autre et soit d la distance entre A et B. Considérer un point quelconque $C \in S$ différent de A et de B. La distance du point C à la droite AB doit être au plus $\frac{4034}{d}$ car l'aire du triangle ABC est au plus 2017. Alors si ℓ est une droite perpendiculaire à AB, les projections des points de S sur ℓ se trouvent dans un intervalle de longueur $\frac{8068}{d}$ et qui est centré au point d'intersection de ℓ et AB. De plus, toutes ces projections doivent se trouver dans un intervalle de longueur au plus d sur ℓ car la plus grande distance entre deux de ces projections est au plus d. Comme $\min(d, 8068/d) \leq \sqrt{8068} < 90$, ceci montre la déclaration.

   Noter maintenant que les projections des n cercles sur la droite ℓ sont des intervalles de longueur 2, contenus dans un intervalle de longueur au plus $\sqrt{8068} + 2 < 92$. Chaque point de cet intervalle appartient en moyen à $\frac{2n}{\sqrt{8068}+2} > \frac{n}{46}$ des sous-intervalles de longueur 2 qui correspondent aux projections des n cercles sur ℓ. Alors il existe un certain point $x \in \ell$ appartenant aux projections de plus de $\frac{n}{46}$ cercles. La droite passant par x et perpendiculaire à ℓ a la propriété voulue. Pour $n = 100$, on déduit qu'il existe une droite qui intersecte au moins trois des cercles. □