**Solutions de l'OMC 2016**

**Problème 1**. *Les entiers* $1, 2, 3, \ldots, 2016$ *sont écrits sur un tableau. On peut choisir n'importe quelle paire de nombres sur le tableau et les remplacer par leur moyenne. Par exemple, on peut remplacer* $1$ *et* $2$ *par* $1.5$ *ou on peut remplacer* $1$ *et* $3$ *par une deuxième copie de* $2$. *Après avoir effectué 2015 remplacements de la sorte, il ne restera qu'un seul nombre sur le tableau.*

*(a) Montrez qu'il existe une séquence de remplacements pour laquelle le nombre final est 2.*
*(b) Montrez qu'il existe une séquence de remplacements pour laquelle le nombre final est 1000.*

**Solution. Méthode 1 :** (a) Commençons par remplacer 2014 et 2016 par 2015, puis ensuite les deux copies de 2015 par une seule copie de ce même nombre. Les nombres restants sont maintenant $\{1, 2, \ldots, 2013, 2015\}$. À partir de là, on remplace 2013 et 2015 par 2014 pour obtenir $\{1, 2, \ldots, 2012, 2014\}$. On peut ensuite remplacer 2012 et 2014 par 2013. On continue de la sorte pour en arriver à $\{1, 3\}$. On termine en remplaçant 1 et 3 par 2.

(b) En utilisant la même technique qu'en (a), on peut trouver une séquence de remplacements qui réduit $\{a, a+1, \ldots, b\}$ à $\{a+1\}$. À l'inverse, on peut trouver une séquence de remplacements qui réduit $\{a, a+1, \ldots, b\}$ à $\{b-1\}$.

Dans notre cas, on peut trouver une séquence qui réduit $\{1, 2, \ldots, 999\}$ à $\{998\}$ et une autre qui réduit $\{1001, 1002, \ldots, 2016\}$ à $\{1002\}$. Il nous reste alors les nombres $\{998, 1000, 1002\}$. À ce moment, on peut remplacer 998 et 1002 par une seconde copie de 1000 pour ensuite remplacer les deux 1000 par une seule copie de ce nombre. Ceci complète la construction. $\square$

**Variante :** Utiliser la technique de (a) sur $\{1, 2, \ldots, 1996\}$ et $\{1997, \ldots, 2016\}$ pour obtenir respectivement les nombres 2 et 1998. La moyenne de 2 et 1998 est 1000.

**Méthode 2 pour la question (a) :** Choisissons deux nombres $a_1$ et $a_2$ de 1 à 2016. On prend ensuite la moyenne de ces deux nombres $\frac{a_1+a_2}{2}$ et on choisit un troisième nombre $a_3$. En prenant la moyenne à nouveau, on obtient

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2} + a_3}{2}.$$

À la $k$-ième étape, on choisit un nouveau nombre $a_{k+2}$ et on calcule la moyenne avec le résultat de l'étape précédente. Une fois tous les nombres utilisés, le résultat est

$$\frac{\frac{\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+a_3}{2}+a_4}{2+\cdots} + a_{2016}}{2} = \frac{a_1}{2^{2015}} + \frac{a_2}{2^{2015}} + \frac{a_3}{2^{2014}} + \frac{a_4}{2^{2013}} + \frac{a_5}{2^{2012}} + \ldots + \frac{a_{2016}}{2}.$$

Nous montrerons qu'en choisissant

$$a_1 = 2016,\ a_2 = 2014,\ a_3 = 2015, \quad \text{et}$$
$$a_j = 2017 - j \quad \text{pour} j = 4, \ldots, 2016$$

on obtient 2 comme nombre final.

On débute en calculant la somme des 2013 derniers termes :

$$\begin{aligned}
&\frac{a_4}{2^{2013}} + \frac{a_5}{2^{2012}} + \ldots + \frac{a_{2016}}{2} \\
&\quad = \frac{2013}{2^{2013}} + \frac{2012}{2^{2012}} + \ldots + \frac{2}{2^2} + \frac{1}{2} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{2013} \sum_{i=k}^{2013} \frac{1}{2^i} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{2013} \left( \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{2013}} \right) && \text{formule pour la série géométrique} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{2013} \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{2013}{2^{2013}} \\
&\quad = \left( 2 - \frac{2}{2^{2013}} \right) - \frac{2013}{2^{2013}} && \text{formule pour la série géométrique} \\
&\quad = 2 - \frac{2015}{2^{2013}}.
\end{aligned}$$

Le dernier nombre sur le tableau est

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1}{2^{2015}} + \frac{a_2}{2^{2015}} + \frac{a_3}{2^{2014}} + \left( \frac{a_4}{2^{2013}} + \ldots + \frac{a_{2016}}{2} \right) \\
&\quad = \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2014}{2^{2015}} + \frac{2015}{2^{2014}} + \left( 2 - \frac{2015}{2^{2013}} \right) \\
&\quad = 2.
\end{aligned}$$

□

**Problème 2**. *Voici un système de* 10 *équations avec* 10 *variables réelles* $v_1, \ldots, v_{10}$ *:*

$$v_i \;=\; 1 + \frac{6\, v_i^2}{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_{10}^2} \qquad (i = 1, \ldots, 10).$$

*Trouvez tous les 10-uplets* $(v_1, v_2, \ldots, v_{10})$ *qui sont solution au système d'équations.*

**Solution. Méthode 1 :** Par inspection, on remarque que la solution constante $v_1 = v_2 = \cdots = v_{10}$ est valide si et seulement si la valeur de $v_i$ est $8/5$.

Nous cherchons maintenant les solutions pour lesquelles les valeurs $v_1, \ldots, v_{10}$ ne sont pas toutes égales. Dans ce cas, $v_i \neq v_1$ pour une certaine valeur de $i$. En soustrayant les équations correspondantes, on obtient

$$v_1 - v_i \;=\; \frac{6(v_1^2 - v_i^2)}{v_1^2 + v_2^2 + \cdots v_{10}^2}\,.$$

Puisque $v_1 - v_i \neq 0$, on peut diviser par cette quantité pour obtenir

$$1 \ = \ \frac{6(v_1 + v_i)}{v_1^2 + v_2^2 + \cdots v_{10}^2} \, . \tag{1}$$

Si on a aussi $v_j \neq v_1$, une équation semblable existe avec $v_i$ remplacé par $v_j$, ce qui implique que $v_i = v_j$. Ainsi, les nombres $v_1, \ldots, v_{10}$ peuvent seulement prendre deux valeurs différentes. Notons ces deux valeurs par $x$ et $y$.

Soit $k$ le nombre de variables parmi $v_1, \cdots, v_{10}$ qui prennent la valeur $x$. Alors $1 \leq k \leq 9$. En additionnant les dix équations d'origine, on obtient

$$\sum_{i=1}^{10} v_i \ = \ 10 + \frac{6(v_1^2 + \cdots + v_{10}^2)}{v_1^2 + \cdots + v_{10}^2} \ = \ 16.$$

Ainsi, $kx + (10-k)y \ = \ 16$. L'équation (1) nous donne alors que

$$1 \ = \ \frac{6(x+y)}{kx^2 + (10-k)y^2} \, . \tag{2}$$

Après avoir remplacé $y = (16 - kx)/(10-k)$ dans l'équation précédente et avoir simplifié le résultat, on obtient l'équation du deuxième degré

$$kx^2 - 2(k+3)x + 16 = 0. \tag{3}$$

Le discriminant de cette équation est $4(k-9)(k-1)$. Le paramètre $k$ peut seulement prendre des valeurs parmi $1, 2, \ldots, 9$. L'équation (3) a donc des solutions réelles si et seulement si $k = 1$ ou $k = 9$. Dans le cas $k = 1$, on trouve $x = 4$ et $y = 4/3$ tandis que dans le cas $k = 9$, on trouve $x = 4/3$ et $y = 4$. Les seules autres solutions (à part la solution constante trouvée plus tôt) sont les dix permutations de $(4, 4/3, \ldots, 4/3)$. $\square$

**Méthode 2** : Pour une solution particulière $(v_1, v_2, \ldots, v_{10})$, soit $s = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_{10}^2$. Ainsi

$$v_i = 1 + \frac{6v_i^2}{s} \quad \Rightarrow \quad 6v_i^2 - sv_i + s = 0.$$

Soient $a$ et $b$ les solutions à l'équation $6x^2 - sx + s = 0$. Pour chaque valeur de $i$, $v_i = a$ ou $v_i = b$. Par la formule de Viète, $ab = s/6$.

Si tous les $v_i$ sont égaux, alors

$$v_i = 1 + \frac{6}{10} = \frac{8}{5}.$$

Autrement, posons $5+k$ comme le nombre de $v_i$ qui prennent la valeur $a$ et $5-k$ comme le nombre de $v_i$ qui prennent la valeur $b$, où $0 \leq k \leq 4$. Par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$6ab \ = \ s \ = \ (5+k)a^2 + (5-k)b^2 \ \geq \ 2ab\sqrt{25 - k^2}.$$

À partir des équations données, $v_i \geq 1$ pour tout $i$, donc $a$ et $b$ sont des nombres positifs. Ainsi, $\sqrt{25-k^2} \leq 3 \Rightarrow 25-k^2 \leq 9 \Rightarrow k^2 \geq 16 \Rightarrow k = 4$. Donc $6ab = 9a^2 + b^2 \Rightarrow (b-3a)^2 = 0 \Rightarrow b = 3a$.

En additionnant les dix équations données, on trouve

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_{10} = 16.$$

Mais $v_1 + v_2 + \cdots + v_{10} = 9a + b = 12a$, donc $a = 16/12 = 4/3$ et $b = 4$. Ainsi, les solutions sont $(8/5, 8/5, \ldots, 8/5)$ et les dix permutations de $(4/3, 4/3, \ldots, 4/3, 4)$. $\square$

**Problème 3**. *Trouvez tous les polynômes $P(x)$ à coefficients entiers tels que $P(P(n)+n)$ est un nombre premier pour une infinité de valeurs de $n$.*

**Solution**. Nous allons montrer que les seuls polynômes qui satisfont aux conditions sont ceux de la forme $P(n) = p$ où $p$ est un nombre premier et $P(n) = -2n + b$ où $b$ est impair.

Remarquons que si $P(n) = 0$, alors $P(P(n)+n) = P(n) = 0$ qui n'est pas premier. Soit $P(x)$ un polynôme de degré $k$ de la forme $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$. Remarquons que si $P(n) \neq 0$ alors

$$\begin{aligned} P(P(n)+n) - P(n) \; &= \\ &a_k[(P(n)+n)^k - n^k] + a_{k-1}[(P(n)+n)^{k-1} - n^{k-1}] + \cdots + a_1 P(n) \end{aligned}$$

qui est divisible par $(P(n)+n) - n = P(n)$. Ainsi, si $P(P(n)+n)$ n'est pas premier, alors soit $P(n) = \pm 1$ ou $P(P(n)+n) = \pm P(n) = p$ pour un certain nombre premier $p$. Puisque $P(x)$ est un polynôme, l'équation $P(n) = \pm 1$ peut seulement tenir pour un nombre fini d'entiers $n$. Donc soit $P(n) = P(P(n)+n)$ pour une infinité de nombre entiers $n$ ou $P(n) = -P(P(n)+n)$ pour une infinité de nombre entiers $n$.

Supposons pour commencer que $P(n) = P(P(n)+n)$ pour une infinité de nombre entiers $n$. Ceci implique que le polynôme $P(P(x)+x) - P(x)$ a une infinité de racines et est donc partout 0. Ainsi l'égalité $P(P(x)+x) = P(x)$ tient pour toutes les valeurs de $x$. On remarque ensuite que si $k \geq 2$, alors $P(P(x)+x)$ est de degré $k^2$ lorsque $P(x)$ est de degré $k$, ce qui n'est pas possible. Alors $P(x)$ est au plus de degré 1, soit de la forme $P(x) = ax + b$ pour certains entiers $a$ et $b$. Dans ce cas,

$$P(P(x)+x) = a(a+1)x + ab + b$$

donc $a = a(a+1)$ et $ab + b = b$. On en déduit que $a = 0$, ce qui nous mène à la solution $P(n) = p$ pour $p$ un nombre premier. Par le même argument, si $P(n) = -P(P(n)+n)$ pour une infinité d'entiers $n$, alors $P(x) = -P(P(x)+x)$ tient partout et $P(x)$ est linéaire avec $P(x) = ax + b$. Dans ce cas, on obtient les équations $a = -a(a+1)$ et $ab + b = -b$. On en déduit que $a = 0$ ou $a = -2$. Si $a = -2$, alors $P(n) = -2n + b$ est premier pour certains entiers $n$ seulement si $b$ est impair. De plus, $P(P(n)+n) = 2n - b$ est premier pour une infinité d'entiers $n$ si $b$ est impair. $\square$

**Problème 4**. *Vulcain contre la puce. Soit $A$, $B$ et $F$ des nombres entiers positifs choisis de façon à ce que $A < B < 2A$. Une puce est située sur le nombre 0 de la droite réelle. La puce se déplace en faisant des sauts de longueur $A$ ou $B$ vers la droite. Avant que la puce ne commence à sauter, Vulcain choisit un nombre fini d'intervalles $\{m+1, m+2, \ldots, m+A\}$ consistant en $A$ entiers positifs consécutifs et met de la lave sur les entiers de chaque intervalle. Les intervalles doivent être choisis de façon à ce que :*

*(i) deux intervalles distincts ne peuvent pas être superposés, ni adjacents ;*
*(ii) il doit y avoir au moins $F$ entiers sans lave entre chaque paire d'intervalles ; et*
*(iii) aucune lave n'est placée sur les entiers inférieurs à $F$.*

*Montrez que la plus petite valeur de $F$ pour laquelle la puce peut traverser les intervalles sans toucher à la lave peu importe les choix de Vulcain est $F = (n-1)A + B$, où $n$ est l'entier positif tel que $\dfrac{A}{n+1} \le B - A < \dfrac{A}{n}$ .*

**Solution.** Soit $C = B - A$. Nous allons écrire les intervalles de lave sous la forme $(L_i, R_i] = \{L_i+1, L_i+2, \ldots, R_i\}$, où $R_i = L_i + A$ et $R_{i-1} < L_i$ pour tout $i \ge 1$. On pose aussi $R_0 = 0$. Nous représenterons un chemin emprunté par la puce par une suite d'entiers notée $x_0, x_1, x_2, \ldots$ où $x_0 = 0$ et $x_j - x_{j-1} \in \{A, B\}$ pour tout entier $j \ge 0$.

Pour commencer, en supposant que $F < (n-1)A + B$ $(= nA + C)$, on doit prouver que Vulcain a une stratégie gagnante. Soit $L_i = R_{i-1} + nA + C - 1$ pour tout $i \ge 1$. (Remarquons que $nA + C - 1 \ge F$.)

Supposons que la puce peut emprunter un chemin de longueur infinie pour éviter la lave. Cela veut dire que $x_j \notin (L_i, R_i]$ pour tout $i, j \ge 1$. Pour chaque entier $i \ge 1$, soit

$$M_i \;=\; \max\{x_j : x_j \le L_i\}\,, \qquad m_i \;=\; \min\{x_j : x_j > R_i\}\,,$$
$$\text{et} \quad J(i) \;=\; \max\{j : x_j \le L_i\}\,.$$

Posons $m_0 = 0$. Alors pour $i \ge 1$ on a

$$M_i \;=\; x_{J(i)} \qquad \text{et} \qquad m_i \;=\; x_{J(i)+1}\,.$$

De plus, pour chaque $i \ge 1$ on a
(a) $m_i = M_i + B$ (car $M_i + A \le L_i + A = R_i$) ;
(b) $L_i \ge M_i > L_i - C$ (car $M_i = m_i - B > R_i - B = L_i + A - B$) ;
(c) $R_i < m_i \le R_i + C$ (car $m_i = M_i + B \le L_i + B = R_i + C$).

<ins>Affirmation 1</ins> : $J(i+1) = J(i) + n + 1$ pour chaque $i \ge 1$. (Cela signifie qu'après avoir sauté par-dessus un intervalle de lave, la puce doit effectuer exactement $n$

sauts avant de sauter par-dessus le prochain intervalle.)
**Preuve** :

$$\begin{aligned} x_{J(i)+n+1} &\leq x_{J(i)+1} + Bn \\ &= m_i + Bn \\ &< R_i + C + \left(A + \frac{A}{n}\right) n \\ &= L_{i+1} + A + 1 \,. \end{aligned}$$

À cause de l'inégalité stricte, nous avons $x_{J(i)+n+1} \leq R_{i+1}$ donc $x_{J(i)+n+1} \leq L_{i+1}$. Ainsi, $J(i) + n + 1 \leq J(i+1)$. De plus nous avons

$$\begin{aligned} x_{J(i)+n+1} &\geq x_{J(i)+1} + An \\ &= m_i + An \\ &> R_i + An \\ &= L_{i+1} - C + 1 \\ &> L_{i+1} - A + 1 \quad \text{(puisque } C < A\text{).} \end{aligned}$$

Ainsi $x_{J(i)+n+2} \geq x_{J(i)+n+1} + A > L_{i+1}$ donc $J(i+1) < J(i) + n + 2$. L'affirmation 1 en suit.

<u>Affirmation 2</u> : $x_{j+1} - x_j = A$ pour tout $j = J(i)+1, \ldots, J(i+1) - 1$, pour tout $i \geq 1$. (Cela signifie que les $n$ sauts intermédiaires de l'affirmation 1 doivent tous être de longueur $A$.)

**Preuve** : Si l'affirmation 2 est fausse, alors

$$\begin{aligned} M_{i+1} = x_{J(i+1)} = x_{J(i)+n+1} &\geq x_{J(i)+1} + (n-1)A + B \\ &> R_i + nA + C \\ &= L_{i+1} + 1 \\ &> M_{i+1} \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Ceci démontre l'affirmation 2.

On peut maintenant conclure que

$$x_{J(i+1)+1} = x_{J(i)+n+2} = x_{J(i)+1} + nA + B \,;$$

$$\text{i.e.,} \qquad m_{i+1} = m_i + nA + B \qquad \text{pour chaque } i \geq 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} m_{i+1} - R_{i+1} &= m_i + nA + B - (R_i + nA + C - 1 + A) \\ &= m_i - R_i + 1 \,. \end{aligned}$$

Donc

$$C \geq m_{C+1} - R_{C+1} = m_1 - R_1 + C > C$$

ce qui est une contradiction. Il n'y a donc aucun chemin qui évite la lave dans ce contexte. On remarque que Vulcain a seulement besoin de mettre de la lave sur les $C+1$ premiers intervalles.

Supposons maintenant que $F \geq (n-1)A + B$. Dans ce cas, on va montrer que la puce peut éviter la lave. Pour ce faire, nous aurons besoin du résultat suivant :

Affirmation 3 : Soit $d \geq nA$. Il existe des entiers positifs $s$ et $t$ tels que $sA + tB \in (d-C, d]$.

On démontrera ce résultat plus tard.

Remarquons tout d'abord que $L_1 \geq nA$. Par l'affirmation 3, il est possible pour la puce de faire une suite de sauts débutant en 0 et terminant sur l'intervalle $(L_1 - C, L_1]$. À partir de n'importe quel entier de cet intervalle, un seul saut de longueur $B$ amène la puce au-delà de l'intervalle $(L_1, R_1]$ en un point de $(R_1, R_1 + C]$, ce qui correspond au point $x_{J(1)+1}$ $(= m_1)$ sur le chemin de la puce.

On utilise ensuite l'induction pour démontrer que pour tout $i \geq 1$, il y a un chemin tel que $x_j$ évite la lave pour tout $j \leq J(i)+1$. Le cas $i = 1$ est fait donc supposons que l'affirmation tient pour une valeur de $i$. Ainsi, $x_{J(i)+1} = m_i \in (R_i, R_i + C]$. Donc

$$L_{i+1} - m_i \ \geq \ R_i + F - (R_i + C) \ = \ F - C \ \geq \ nA\,.$$

L'affirmation 3 avec $d = L_{i+1} - m_i$ montre que la puce peut sauter de $m_i$ à un point de $(L_{i+1} - C, L_{i+1}]$. Un seul saut de longueur $B$ transporte ensuite la puce en un point de $(R_{i+1}, R_{i+1} + C]$ (sans passer par $(L_{i+1}, R_{i+1}]$), et ce point joue le rôle de $x_{J(i+1)+1}$. Ceci complète l'induction.

**Preuve de l'affirmation 3** : Soit $u$ le plus grand entier inférieur ou égal à $d/A$. Alors $u \geq n$ et $uA \leq d < (u+1)A$. Pour $v = 0, \ldots, n$, soit

$$z_v \ = \ (u-v)A + vB \ = \ uA + vC\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&z_0 \ = \ uA \ \leq \ d,\\
&z_n \ = \ uA + nC \ = \ uA + (n+1)C - C \ \geq \ (u+1)A - C \ > \ d - C\,.\\
&\text{et } z_{v+1} - z_v \ = \ C \qquad \text{for } v = 0, \ldots, n-1.
\end{aligned}$$

Ainsi, il doit y avoir $z_v \in (d-C, d]$ pour un certain $v$ dans $\{0, 1, \ldots, n\}$. □

**Remarque** : Voici une différence façon de traiter le cas $F < (n-1)A + B$. En utilisant la même notation, on peut montrer que la puce ne peut pas éviter la lave si les deux premiers intervalles sont $(L_1, R_1] = (nB, nB + A]$ et $(L_2, R_2] = (nA + (n+1)B - 1, (n+1)(A+B) - 1)$. Remarquons que $L_2 - R_1 = (n-1)A + B - 1 \geq F$.On voit aussi que $(n+1)A > nB$.

Supposons que la puce peut éviter ces intervalles de lave en suivant le chemin $0 = x_0, x_1, \ldots$. On montre tout d'abord que les $n+1$ premiers sauts de la puce doivent être de longueur $B$. Puisque $x_{n+1} \geq (n+1)A > nB = L_1$, on doit avoir $x_{n+1} > R_1$ pour éviter le premier intervalle.

Si $j$ des $n+1$ premiers sauts de la puce sont de longueur $A$, alors

$$nB + A \;=\; R_1 \;<\; x_{n+1} \;=\; jA + (n+1-j)B\,,$$

ce qui implique que $j(B-A) \;<\; B-A$. Ceci force $j$ à être 0 et donc $x_{n+1} = (n+1)B$, comme affirmé plus tôt.

On en déduit que la position de la puce après le $(2n+1)^{\text{ème}}$ saut, $x_{2n+1}$, satisfait $(n+1)B + nA \leq x_{2n+1} \leq (2n+1)B$. Puisque $(2n+1)B < (n+1)B + (n+1)A = R_2 + 1$, on trouve que $L_2 + 1 \leq x_{2n+1} \leq R_2$. Ainsi, la puce ne peut pas éviter la lave. $\square$

**Problème 5**. *Soit $\triangle ABC$ un triangle aigu dont les hauteurs $AD$ et $BE$ se croisent en $H$. Soit $M$ le point milieu du segment $AB$ et supposons que les cercles circonscrits aux triangles $\triangle DEM$ et $\triangle ABH$ se rencontrent aux points $P$ et $Q$ avec $P$ du même côté de $CH$ que le point $A$. Montrez que les droites $ED$, $PH$ et $MQ$ passent toutes par un même point situé sur le cercle circonscrit à $\triangle ABC$.*

**Solution :**

Soit $R$ le point d'intersection de $ED$ et $PH$. Puisque les quadrilatères $ECDH$ et $APHB$ sont inscriptibles, on sait que $\angle RDA = 180^\circ - \angle EDA = 180^\circ - \angle EDH = 180^\circ - \angle ECH = 90^\circ + A$ et que $\angle RPA = \angle HPA = 180^\circ - \angle HBA = 90^\circ + A$. Ainsi, $APDR$ est inscriptible. Ceci implique que $\angle PBE = \angle PBH = \angle PAH = \angle PAD = \angle PRD = \angle PRE$, donc $PBRE$ est aussi inscriptible.

Soit $F$, l'autre extrémité de la hauteur reliant $C$ à $AB$. Alors $D, E, F$ et $M$ reposent tous sur le cercle d'Euler (ou cercle des neuf points) de $\triangle ABC$ et sont donc inscriptibles. On sait aussi que $APDR$, $PBRE$, $BCEF$ et $ACDF$ sont inscriptibles, ce qui implique que $\angle ARB = \angle PRB - \angle PRA = \angle PEB - \angle PDA = \angle PEF + \angle FEB - \angle PDF + \angle ADF = \angle FEB + \angle ADF = \angle FCB + \angle ACF = C$. Ainsi, $R$ repose sur le cercle circonscrit à $\triangle ABC$.

Utilisons maintenant $Q'$ et $R'$ pour décrire les intersections de la droite $MQ$ avec le cercle circonscrit à $\triangle ABC$. Les étiquettes sont choisies de façon à ce que $Q', M, Q, R'$ se situent sur la droite dans cet ordre. Nous allons montrer que $R' = R$, ce qui complétera la démonstration. Avant tout, remarquons que le cercle circonscrit à $\triangle ABC$ a un rayon de mesure $\frac{AB}{2\sin C}$ et que le cercle circonscrit à $\triangle ABH$ a un rayon de mesure $\frac{AB}{2\sin\angle AHB} = \frac{AB}{2\sin(180° - C)}$. Les deux cercles ont alors le même rayon et doivent donc être symétriques par rapport au point $M$. En particulier, $MQ = MQ'$.

Puisque $\angle AEB = \angle ADB = 90°$, on sait que $M$ est le centre des cercles circonscrits aux triangles $\triangle AEB$ et $\triangle ADB$. Ainsi, $MA = ME = MD = MB$. Par la puissance d'un point, on en déduit que $MQ \cdot MR' = MQ' \cdot MR' = MA \cdot MB = MD^2$. En particulier, cela signifie que le cercle circonscrit à $\triangle DR'Q$ est tangent à $MD$ en $D$, et donc que $\angle MR'D = \angle MDQ$. De la même façon, $MQ \cdot MR' = ME^2$ et donc $\angle MR'E = \angle MEQ = \angle MDQ = \angle MR'D$. Ainsi, $R'$ repose aussi sur la droite $ED$.

Finalement, le même argument montre que $MP$ croise aussi le cercle circonscrit à $\triangle ABC$ en un point $R''$ situé sur la droite $ED$. Donc $R, R'$ et $R''$ sont tous des points de rencontre du cercle circonscrit à $\triangle ABC$ et de la droite $ED$. Ainsi, deux des points $R, R'$ et $R''$ doivent être égaux. Par contre, $R'' \neq R$ puisque $MP$ et $PH$ se croisent déjà en $P$. De plus, $R'' \neq R'$ puisque $MP$ et $MQ$ se croisent déjà en $M$. Ainsi, $R' = R$ et la preuve est terminée. $\square$