Olympiade mathématique du Canada 2014

PROBLÈME 1

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs dont le produit est 1. Montrer que la somme

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} + \cdots + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

est supérieure ou égale à $\dfrac{2^n-1}{2^n}$.

SOLUTION 1

Notons que pour tout entier positif m,

$$\begin{aligned}\frac{a_m}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_m)} &= \frac{1+a_m}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_m)} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_m)} \\ &= \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{m-1})} - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_m)}.\end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $b_j = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_j)$, avec $b_0 = 0$, alors la série suivante se simplifie par télescopage :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{(1+a_1)\cdots(1+a_j)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{b_{j-1}} - \frac{1}{b_j}\right) = 1 - \frac{1}{b_n}.$$

Observons que $b_n = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq (2\sqrt{a_1})(2\sqrt{a_2})\cdots(2\sqrt{a_n}) = 2^n$ et l'inégalité est saturée si et seulement si tous les a_i valent 1. Par conséquent

$$1 - \frac{1}{b_n} \geq 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n-1}{2^n}.$$

Pour vérifier que cette borne inférieure est optimale, il convient de remplacer tous les a_i par 1 pour obtenir

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1}{2^n} = \frac{2^n-1}{2^n}.$$

PROBLÈME 2

Soit m et n des entiers positifs impairs. Chaque carré d'un tableau m par n est coloré en rouge ou en bleu. Une rangée est dite rouge-dominante si elle possède plus de carrés rouges que de carrés bleus. Une colonne est dite bleu-dominante si elle possède plus de carrés bleus que de carrés rouges. Trouver la valeur maximale que peut prendre la somme du nombre de rangées rouge-dominantes et du nombre de colonnes bleu-dominantes. Exprimez votre réponse en termes de m et n.

SOLUTION 2

La réponse est $m + n - 2$ si $m, n \geq 3$ et $\max\{m, n\}$ si l'un parmi m, n est égal à 1.

Notons qu'il est impossible que toutes les rangées soient rouge-dominantes et que toute les colonnes soient bleu-dominantes. En effet, comme le nombre de rangées et de colonnes sont tous deux impairs, le nombre total de carré est impair. Il y a donc impérativement plus de carré d'une couleur que de l'autre. Sans perte de généralité, supposons qu'il y ait plus de carrés rouges que de carrés bleus. Il n'est donc pas possible que chaque colonne comporte plus de carrés bleus que de carrés rouges car les colonnes ne peuvent pas toutes êtres bleu-dominantes.

S'il l'un ou l'autre de m et n est égal à 1 (sans perte de généralité disons qu'il s'agit de m), alors la réponse est inférieure à $n + 1$. Peindre tous les carrés en bleu constitue un exemple d'un cas de figure où il y a n colonnes bleu-dominantes; il y a alors 0 rangées rouge-dominantes et il s'ensuit que la somme des deux est $n = \max\{m, n\}$.

Nous allons maintenant traiter le cas où $m, n \geq 3$.

Il y a m rangées et n colonnes sur le tableau. La réponse est donc au plus $m + n$. Or, nous avons vu que la réponse ne peut pas être $m + n$.

Comme m, n sont impairs, posons $m = 2a-1$ et $n = 2b-1$ où a, b sont des entiers positifs. Puisque $m, n \geq 3$, $a, b \geq 2$. Nous allons dans un premier temps montrer que la réponse n'est pas $m + n - 1$. Par symétrie, il suffit de montrer qu'il n'est pas possible que toutes les rangées soient rouge-dominantes et que toutes les colonnes sauf une soient bleu-dominantes. Si toutes les rangées sont rouge-dominantes, alors chaque rangée contient au moins b carrés rouges. Il y a ainsi au moins $bm = (2a - 1)b$ carrés rouges. Comme toutes les colonnes sauf une sont bleu-dominantes, il y a au moins $2b - 2$ colonnes bleu-dominantes. Par conséquent, il y a au moins $a(2b - 2)$ carrés bleus. Il s'ensuit que le tableau comporte au moins $(2a-1)b+a(2b-2) = 4ab-b-2a$ carrés. Or, le nombre total de carrés dans le tableau est

$$(2a - 1)(2b - 1) = 4ab - 2a - 2b + 1 = 4ab - 2a - b - b + 1 < 4ab - 2a - b,$$

ce qui est vrai car $b \geq 2$. Cette contradiction nous force à conclure que la réponse est inférieure à $m + n - 1$.

Nous affirmons ensuite qu'il existe une coloration du tableau pour lequel le nombre de colonnes bleu-dominantes plus le nombre de rangées rouges-dominantes est $m + n - 2$; Appliquons une coloration rouge à la totalité de la première colonne et une coloration bleue à la première rangée à l'exception du coin supérieur gauche. Les carrés restant forment un tableau pair-par-pair. Nous allons appliquer une coloration au carrés restant en alternant les couleurs (c'est-à-dire en produisant un motif de damier). Ainsi, sur ce tableau pair-par-pair, chaque rangée comporte le même nombre de carrés rouges que de carrés bleus et chaque colonne contient le même nombre de carrés rouges que de carrés bleus. Cela signifie que, sur la totalité du tableau, comme la rangée supérieure moins le coin supérieur gauche est bleu, toutes les colonnes exceptée celle située à l'extrémité gauche sont bleu-dominantes. Il y a donc $n - 1$ colonnes bleu-dominantes. Comme la colonne gauche est rouge, toutes les rangées sauf celle du haut sont rouge-dominantes. Il y a donc $m-1$ rangées rouge-dominantes. La somme de ces deux quantités est $m+n-2$ comme voulu.

Problème 3

Soit p un nombre premier impair. Un p-uplet $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)$ d'entiers est dit *admissible* si

(i) $0 \leq a_i \leq p - 1$ pour tout i;

(ii) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p$ n'est pas divisible par p;

(iii) $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_pa_1$ est divisible par p.

Déterminer le nombre de p-uplets admissibles.

Solution 3

Soit S l'ensemble des suites $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ de nombres qui proviennent de l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ pour lesquels $b_1 + b_2 + \cdots + b_p$ n'est pas divisible par p. Montrons que $|S| = p^p - p^{p-1}$. Soit $b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}$ une suite arbitraire de nombres de l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$. Il y a exactement $p - 1$ choix de b_p pour lesquels $b_1 + b_2 + \cdots + b_{p-1} + b_p \not\equiv 0 \pmod p$. Par conséquent $|S| = p^{p-1}(p - 1) = p^p - p^{p-1}$.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe $\frac{1}{p}|S|$ suites admissibles dans S. Étant donnée une suite $B = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$ dans S, définissons $B_k = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ par

$$a_i = b_i - b_1 + k \bmod p$$

pour $1 \leq i \leq p$. Observons que l'appartenance de B à S implique que

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_p &\equiv (b_1 + b_2 + \cdots + b_p) - pb_1 + pk \\ &\equiv (b_1 + b_2 + \cdots + b_p) \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que B_k est dans S pour tout entier non négatif k. Remarquons que, pour tout $0 \leq k \leq p-1$, le premier élément de B_k est k. Ainsi, les suites $B_0, B_1, \ldots, B_{p-1}$ sont distinctes deux à deux.

On définit le *cycle* de B comme étant l'ensemble $\{B_0, B_1, \ldots, B_{p-1}\}$. Notons que B appartient à son propre cycle puisque $B = B_k$ où $k = b_1$. Puisque chaque suite appartenant à S est dans exactement un cycle, S est l'union disjointe de cycles.

Nous allons maintenant montrer qu'exactement une suite par cycle est admissible. Considérons un cycle arbitraire $B_0, B_1, \ldots, B_{p-1}$, et soit $B_0 = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$ où $b_0 = 0$. Observons que $B_k = (b_1+k, b_2+k, \ldots, b_p+k) \bmod p$. Comme $u = b_1+b_2+\cdots+b_p$ et $v = b_1b_2+b_2b_3+\cdots+b_pb_1$, on remarque que $(b_1+k)(b_2+k)+(b_2+k)(b_3+k))+\cdots+(b_p+k)(b_1+k) = u+2kv \bmod p$ pour tout $0 \leq k \leq p-1$. Comme $2v$ n'est pas divisible par p, il existe une unique valeur de k avec $0 \leq k \leq p-1$ pour laquele p divise $u+2kv$ et c'est précisément pour cette valeur de k que B_k est admissible. Cela montre qu'il y exactement une suite admissible par cycle et par suite, que le nombre de suites admissibles dans S est $\frac{1}{p}|S|$, c'est-à-dire $p^{p-1} - p^{p-2}$.

Problème 4

Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle. Le point P est à l'intérieur de $ABCD$ et $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA$. Les droites AD et BC se croisent en Q et les droites AB et CD se croisent en R. Montrer que les droites PQ et PR forment le même angle que les diagonales de $ABCD$.

Solution 4

Soit Γ le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$. Soit $\alpha = \angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA$. Soit encore T_1 , T_2 , T_3 et T_4 les cercles circonscrits aux triangles APD, BPC, APB and CPD, respectivement. Soit M l'intersection de T_1 avec la droite RP et soit N l'intersection T_3 avec la droite SP. Enfin soit X l'intersection des diagonales AC et BD.

Par la puissance d'un point par rapport aux cercles T_1 et Γ, il s'ensuit que $RM \cdot RP = RA \cdot RD = RB \cdot RC$ ce qui implique que le quadrilatère BMPC est cyclique et M se trouve sur T_2. Par conséquent $\angle PMB = \angle PCB = \alpha = \angle PAB = \angle DMP$ où tous ces angles sont orientés. Il s'ensuit que M se situe sur la diagonale BD et que $\angle XMP = \angle DMP = \alpha$. Un argument similaire appliqué à S, T_3 et T_4, montre que N se situe sur T_4 et que N est sur la diagonale AC avec $\angle XNP = \alpha$. Ainsi $\angle XMP = \angle XNP$ et X, M, P de mm̂e que N sont cocycliques.

Il s'ensuit que l'angle formé par les droites MP et NP est égal à l'un des angles formés par les droites MX et NX. Le résultat recherché découle enfin du fait que M se situe sur BD et RP et que N se situe sur AC et SP.

Problème 5

On fixe des entiers $n \geq 1$ et $k \geq 2$. Une liste de n entiers est écrite sur un tableau. À chaque étape, vous pouvez choisir un bloc d'entiers adjacents et additionner 1 à chacun de ces entiers ou soustraire 1 de chacun de ces entiers. Cette étape peut être répétée autant de fois que voulu et il est possible d'adapter le choix du bloc selon ces actions. Montrer qu'après un nombre fini d'étapes, vous serez capable d'atteindre un état pour lequel $n - k + 2$ nombres sur le tableau sont divisibles par k.

Solution 5

Dans ce qui suit, nous allons systématiquement associé les nombres avec leurs résidus mod k. Considérons la stratégie suivante :

- S'il y a moins de $k - 1$ nombres non nuls, alors la procédure prend fin.
- Si le premier nombre est zéro 0, alors on résout récursivement avec les nombres restant.
- Si le premier nombre est j avec $0 < j < k$, alors on choisi l'intervalle s'étendant du premier nombre jusqu'au j-ième avant-dernier nombre non nul.

Notons dans un premier temps que cette stratégie est bien définie. La valeur du premier nombre doit se situer entre 0 et $k - 1$ et, si la procédure ne prend pas fin immédiatement, alors c'est qu'il y a au moins $k - 1$ nombres non nuls. Par conséquent, la troisième étape de la procédure peut aller de l'avant.

Pour tout j avec $1 \leq j \leq k - 2$, nous affirmons que le premier nombre ne peut valoir j un nombre fini de fois tout au plusavant de prendre la valeur $j - 1$. En effet, s'il en était autrement, alors chaque fois que le premier nombre deviendrait j, il suffirait d'ajouter 1 aux nombres sélectionnés afin d'éviter d'avoir $j - 1$. Cela aurait pour effet d'augmener le j-ième avant dernier nombre non-nul et ce nombre ne serait jamais altéré lors des autres étapes. Ainsi, ce nombre deviendrait éventuellement 0, cédant son titre de j-ième avant dernier nombre non-nul à au nombre qui deviendrait lui aussi éventuellement nul et ainsi de suite jusqu'à ce que le premier nombre lui-même devienne le j-ième avant dernier nombre non nul. À ce stade, l'argument prend fin car $j \leq k - 2$.

Reformulons: si $1 \leq j \leq k - 2$, le premier nombre ne peut valoir j un nombre fini de fois tout au plus entre chaque occurrence de la valeur $j - 1$. Il s'ensuit donc que, si le premier nombre vaut $j - 1$ au plus un nombre fini de fois, alors il ne peut prendre la valeur de j également un nombre fini de fois tout au plus. En revanche, s'il prend éventuellement la valeur 0 alors le problème se réduit au cas $n - 1$; nous pouvons donc supposer que cela ne se produit jamais. Il s'ensuit donc que le premier nombre peut prendre toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, k - 2$ au plus un nombre fini de fois.

Enfin, chaque fois que le premier nombre vaut $k - 1$, il doit valoir $k - 2$ et 0. Ainsi, cela ne peut également se produire un nombre fini de fois.