45^{e} Olympiade mathématique du Canada

Mercredi le 27 mars 2013

Problèmes et Solutions

1. Trouvez tous les polynômes à coefficients réels $P(x)$ tels que

$$(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)$$

est un polynôme constant.

Solution 1 : La réponse est : $P(x)$ est un polynôme constant et $P(x) \equiv kx^2 + kx + c$ pour toutes constantes k non nulle et c quelconque.

Notons Λ l'expression $(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)$, i.e. l'expression dans la question.

En remplaçant $x = -1$ dans Λ, on trouve $2P(-1)$. De la même façon pour $x = 1$, on trouve $2P(0)$. Puisque $(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)$ est un polynôme constant, $2P(-1) = 2P(0)$. Ainsi, $P(-1) = P(0)$.

Soit $c = P(-1) = P(0)$ et $Q(x) = P(x) - c$. Alors $Q(-1) = Q(0) = 0$. Ainsi, $0, -1$ sont les racines de $Q(x)$. Donc $Q(x) = x(x+1)R(x)$ pour un certain polynôme R. On a ainsi $P(x) - c = x(x+1)R(x)$ ou $P(x) = x(x+1)R(x) + c$.

En remplaçant l'expression dans Λ, on trouve

$$(x+1)((x-1)xR(x-1)+c)-(x-1)(x(x+1)R(x)+c)$$

Ceci est un polynôme constant qui peut être simplifié à

$$x(x-1)(x+1)(R(x-1)-R(x))+2c.$$

Il est donc nécessaire que $x(x-1)(x+1)(R(x-1)-R(x))$ soit constant. Ainsi, $R(x-1)-R(x)=0$ comme polynôme. Donc $R(x)=R(x-1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $R(x)$ est un polynôme qui prend la même valeur pour une infinité de valeurs de x. Soit k une telle valeur. Alors $R(x)-k$ a une infinité de racines, ce qui n'est possible que si $R(x)-k=0$ comme polynôme. Ainsi, $R(x)$ doit être constant (et égal à k). On a donc que $Q(x)=kx(x+1)$ pour une constante k et $P(x)=kx(x+1)+c=kx^2+kx+c$.

Pour terminer, on vérifie que tous les $P(x)=kx(x+1)+c$ fonctionnent. On remplace encore une fois dans Λ et on obtient

$$\begin{aligned} & (x+1)(kx(x-1)+c)-(x-1)(kx(x+1)+c) \\ = \ & kx(x+1)(x-1)+c(x+1)-kx(x+1)(x-1)-c(x-1)=2c. \end{aligned}$$

Ainsi, $P(x)=kx(x+1)+c=kx^2+kx+c$ est une solution à l'équation pour toute constante k. De plus, on remarque que la solution fonctionne pour $k=0$. Par conséquent, les polynômes constants sont aussi solution de l'équation. $\square$

Solution 2 : Comme pour la Solution 1, tout polynôme constant P satisfait la propriété voulue. Nous supposerons donc P non constant.

Soit n le degré de P. Puisque P n'est pas constant, $n \geq 1$. Soit

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

avec $a_n \neq 0$. Alors

$$(x+1)\sum_{i=0}^{n} a_i(x-1)^i-(x-1)\sum_{i=0}^{n} a_i x^i=C,$$

pour une certaine constante C. Nous allons comparer les coefficients de x^n du côté gauche de l'équation avec ceux du côté droit. Puisque C est une constante et que $n \geq 1$, le coefficient de x^n du côté droit est nul. On s'intéresse maintenant au coefficient de x^n du côté gauche de l'expression.

On peut simplifier le côté gauche à

$$x\sum_{i=0}^{n} a_i(x-1)^i+\sum_{i=0}^{n} a_i(x-1)^i-x\sum_{i=0}^{n} a_i x^i+\sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

On cherche le coefficient de x^n pour chacun de ces quatre termes.

Par le théorème du binôme, le coefficient pour x^n dans le premier terme est le même que celui de $x\left(a_{n-1}(x-1)^{n-1}+a_n(x-1)^n\right)=a_{n-1}-\binom{n}{n-1}a_n=a_{n-1}-na_n$.

Pour le second terme, on trouve qu'il est égal à celui de $a_n(x-1)^n$, qui est a_n.

Le coefficient de x^n dans le troisième terme est a_{n-1} et celui du quatrième terme est a_n.

En additionnant ces quatres valeurs, on obtient $a_{n-1}-na_n+a_n-a_{n-1}+a_n=(2-n)a_n$.

Cette expression est égale à zéro 0. Puisque $a_n\neq 0$, $n=2$. Ainsi, P est un polynôme de degré deux.

Soit $P(x)=ax^2+bx+c$, où a,b,c sont des nombres réels avec $a\neq 0$. Alors

$$(x+1)(a(x-1)^2+b(x-1)+c)-(x-1)(ax^2+bx+c)=C.$$

Après avoir simplifié le côté gauche, on trouve

$$(b-a)x+2c=2C.$$

Ainsi, $b-a=0$ et $2c=2C$. Donc $P(x)=ax^2+ax+c$. Comme dans la solution 1, la forme trouvée fonctionne pour tout $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. $\square$

2. La séquence $a_1, a_2, \ldots, a_n$ consiste des nombres $1, 2, \ldots, n$ écrits dans un certain ordre. Pour quels entiers positifs n est-il possible que $0, a_1, a_1+a_2, \ldots, a_1+a_2+\ldots+a_n$ aient tous des restes différents lorsque divisés par $n+1$?

Solution : Ceci est possible si et seulement si n est impair.

Si n est pair, alors $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$, qui est congruent à 0 mod $n+1$. Ainsi, il est impossible de réaliser ce qui est demandé.

Prenons maintenant n impair. Nous allons montrer qu'il est possible de construire $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qui satisfait le critère demandé. Écrivons $n = 2k+1$ pour un certain entier positif k et considérons la séquence suivante : $1, 2k, 3, 2k-2, 5, 2k-3, \ldots, 2, 2k+1$, i.e. pour chaque $1 \leq i \leq 2k+1$, $a_i = i$ si i est impair et $a_i = 2k+2-i$ si i est pair.

Nous montrons pour commencer que $1, 2, \ldots, 2k+1$ apparaissent chacun une fois dans la séquence. Il y a clairement $2k+1$ termes dans la séquence. Pour tout nombre impair m dans $\{1, 2, \ldots, 2k+1\}$, $a_m = m$. Pour tout nombre pair m dans le même ensemble, $a_{2k+2-m} = 2k+2-(2k+2-m) = m$. Ainsi, chaque chaque nombre apparait une seule fois dans la séquence $a_1, \ldots, a_{2k+1}$. Donc $a_1, \ldots, a_{2k+1}$ consiste bel et bien des nombres $1, 2, \ldots, 2k+1$ dans un certain ordre.

On trouve maintenant $a_1 + a_2 + \ldots + a_m \pmod{2k+2}$. Nous considérons les cas où m est impair et où m est pair séparément. Soit $b_m = a_1 + a_2 \ldots + a_m$.

Si m est impair, on remarque que $a_1 \equiv 1 \pmod{2k+2}$, $a_2 + a_3 = a_4 + a_5 = \ldots = a_{2k} + a_{2k+1} = 2k+3 \equiv 1 \pmod{2k+2}$. Ainsi, $\{b_1, b_3, \ldots, b_{2k+1}\} = \{1, 2, 3, \ldots, k+1\}$ $\pmod{2k+2}$.

Si m est pair, on remarque que $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = \ldots = a_{2k-1} + a_{2k} = 2k+1 \equiv -1$ $\pmod{2k+2}$. Ainsi, $\{b_2, b_4, \ldots, b_{2k}\} = \{-1, -2, \ldots, -k\} \pmod{2k+2} \equiv \{2k+1, 2k, \ldots, k+2\} \pmod{2k+2}$.

Les termes de la séquence $b_1, b_2, \ldots, b_{2k+1}$ ont donc bel et bien des restes différents lorsque divisés par $2k+2$. Ceci complète le problème. □

3. Let G be the centroid of a right-angled triangle ABC with $\angle BCA = 90°$. Let P be the point on ray AG such that $\angle CPA = \angle CAB$, and let Q be the point on ray BG such that $\angle CQB = \angle ABC$. Prove that the circumcircles of triangles AQG and BPG meet at a point on side AB.

Solution 1. Puisque $\angle C = 90°$, le point C repose sur le demi-cercle de diamètre AB ce qui implique que si M est le point milieu du segment AB, alors $MA = MC = MB$. Le triangle AMC est ainsi isocèle et on a $\angle ACM = \angle A$. Par définition, G repose sur le segment M et il s'ensuit que $\angle ACG = \angle ACM = \angle A = \angle CPA$. Ceci implique que les triangles APC et ACG sont semblables et donc que $AC^2 = AG \cdot AP$. Si on note D le pied de la perpendiculaire à AB passant par C, les triangles ACD et ABC sont semblables et ceci implique que $AC^2 = AD \cdot AB$. Ainsi, $AG \cdot AP = AC^2 = AD \cdot AB$ et, par la puissance d'un point par rapport à un cercle, le quadrilatère $DGPB$ est inscriptible dans un cercle. Ceci implique que D repose sur le cercle circonscrit du triangle BPG. Par un argument symétrique, D repose aussi sur le cercle circonscrit au triangle AGQ. Ces deux cercles se rencontrent donc au point D sur le segment AB.

Solution 2. On définit D et M comme dans la Solution 1. Soit R le point du côté AB tel que $AC = CR$ et que le triangle ACR est isocèle. Comme $\angle CRA = \angle A = \angle CPA$, il s'ensuit que $CPRA$ est inscriptible dans un cercle et donc que $\angle GPR = \angle APR = \angle ACR = 180° - 2\angle A$. Comme dans la solution Solution 1, $MC = MB$ et donc $\angle GMR = \angle CMB = 2\angle A = 180° - \angle GPR$. Ainsi, $GPRM$ est inscriptible dans un cercle et par la puissance d'un point, $AM \cdot AR = AG \cdot AP$. Comme ACR est isocèle, D est le point milieu de AR. Puisque M est le point milieu du côté AB, il s'ensuit que $AM \cdot AR = AD \cdot AB = AG \cdot AP$. Ainsi $DGPB$ est inscriptible dans un cercle et on a le même résultat que pour la Solution 1.

4. Soit n un entier positif. Pour tout entier positif j et nombre réel positif r, on définit

$$f_j(r) = \min(jr, n) + \min\left(\frac{j}{r}, n\right), \quad \text{and} \quad g_j(r) = \min(\lceil jr \rceil, n) + \min\left(\left\lceil \frac{j}{r} \right\rceil, n\right),$$

où $\lceil x \rceil$ signifie le plus petit entier supérieur ou égal à x. Montrez que

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(r) \leq n^2 + n \leq \sum_{j=1}^{n} g_j(r).$$

Solution 1 : Nous commençons par démontrer l'inégalité de gauche. On trace tout d'abord un tableau $n \times n$, avec ses coins positionnés en $(0,0), (n,0), (0,n)$ et (n,n) dans le plan cartésien.

On considère la droite ℓ de pente r qui passe par $(0,0)$. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, on considère le point $(j, \min(jr, n))$. On remarque que chaque point de cette forme est soit sur ℓ où sur le côté supérieur du carré. Dans la $j^{\text{ÈME}}$ colonne à partir de la gauche, on dessine le rectangle de hauteur $\min(jr, n)$. On remarque que la somme des n rectangles est égale à l'aire du tableau sous la droite ℓ plus n triangles (peut-être d'aire nulle) chacun de largeur au plus 1 et dont la somme des hauteurs est au plus n. Ainsi la somme des aires de ces n triangles est au plus $n/2$. Donc $\sum_{j=1}^{n} \min(jr, n)$ est au plus l'aire du carré sous la droite ℓ plus $n/2$.

On cosidère la droite avec pente $1/r$. Par symétrie autour de la droite $y = x$, l'aire du carré sous la droite de pente $1/r$ est égale à l'aire du carré au-dessus de la droite ℓ. En utilisant le même raisonnement que plus tôt, $\sum_{j=1}^{n} \min(j/r, n)$ est au plus l'aire du carré au-dessus de la droite ℓ plus $n/2$.

Ainsi, $\sum_{j=1}^{n} f_j(r) = \sum_{j=1}^{n} (\min(jr, n) + \min(\frac{j}{r}, n))$ est au plus l'aire du tableau plus n, qui est $n^2 + n$. Ceci démontre l'inégalité de gauche.

Pour montrer l'inégalité de droite, on utilise le lemme suivant :

Lemme : Soit ℓ la droite de pente s passant par $(0,0)$. Alors le nombre de carré dans le tableau qui possèdent un point intérieur sous la droite ℓ est $\sum_{j=1}^{n} \min(\lceil js \rceil, n)$.

Démonstration du lemme : Pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, on compte le nombre de carrés dans la $j^{\text{ÈME}}$ colonne (à partir de la gauche) qui contiennent un point intérieur sous la droite ℓ. La ligne $x = j$ croise la droite ℓ en (j, js). Ainsi, comme chaque colonne contient n carrés au total, le nombre de carrés qu'on cherche est $\min(\lceil js \rceil, n)$. En prenant la somme sur tous les $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on démontre le lemme. *Fin de la preuve du lemme*

Par le lemme, le côté droit de l'inégalité est égal au nombre de carrés qui possèdent un point intérieur sous la droite de pente r plus le nombre de carrés possédant un point intérieur sous la droite de pente $1/r$. Par symétrie autour de $y = x$, le deuxième nombre de la somme est égal au nombre de carrés possédant un point intérieur au-dessus de la droite de pente r. Ainsi, la partie de droite de l'inégalité est égale au nombre de carrés dans le tableau plus ceux dont ℓ traverse l'intérieur. Le premier est égal à n^2. Ainsi, pour démontrer l'inégalité, il suffit de montrer que la droite passe par l'intérieur d'au moins n carrés. Puisque ℓ a une pente positive, chaque ℓ passe à travers n rangées et/ou n colonnes. Dans chaque cas, ℓ passe par l'intérieur d'au moins n carrés. Ainsi, l'inégalité de droite tient. $\square$

Solution 2 : On débute par montrer l'inégalité de gauche. On définit la fonction $f(r) = \sum_{j=1}^{n} f_j(r)$. Remarquons que $f(r) = f(1/r)$ pour tout $r > 0$. Ainsi, on peut supposer que $r \geq 1$.

Soit $m = \lfloor n/r \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ signifie le plus grand entier plus petit ou égal à x. Alors $\min(jr, n) = jr$ pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$ et $\min(jr, n) = n$ pour tout $j \in \{m + 1, \ldots, n\}$. Remarquons que puisque $r \geq 1$, $\min(j/r, n) \leq n$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ainsi,

$$f(r) = \sum_{j=1}^{n} f_j(r) = (1 + 2 + \ldots m)r + (n - m)n + (1 + 2 + \ldots + n) \cdot \frac{1}{r}$$

$$= \frac{m(m+1)}{2} \cdot r + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{r} + n(n - m) \qquad (1)$$

Par (**??**), remarquons que $f(r) \leq n^2 + n$ si et seulement si

$$\frac{m(m+1)r}{2} + \frac{n(n+1)}{2r} \leq n(m+1)$$

si et seulement si

$$m(m+1)r^2 + n(n+1) \leq 2rn(m+1) \qquad (2)$$

Puisque $m = \lfloor n/r \rfloor$, il existe un nombre réel b qui satisfait $0 \leq b < r$ tel que $n = mr + b$. En remplaçant l'égalité précédente dans l'équation (**??**) on trouve

$$m(m+1)r^2 + (mr + b)(mr + b + 1) \leq 2r(mr + b)(m + 1),$$

si et seulement si

$$2m^2r^2 + mr^2 + (2mb + m)r + b^2 + b \leq 2m^2r^2 + 2mr^2 + 2mbr + 2br,$$

qui se simplifie à $mr + b^2 + b \leq mr^2 + 2br \Leftrightarrow b(b + 1 - 2r) \leq mr(r-1) \Leftrightarrow b((b-r) + (1-r)) \leq mr(r-1)$. Ceci est vrai puisque

$$b((b-r) + (1-r)) \leq 0 \leq mr(r-1),$$

qui tient puisque $r \geq 1$ et $b < r$. Ainsi, l'inégalité de gauche est démontrée.

On démontre maintenant l'inégalité de droite. On définit la fonction $g(r) = \sum_{j=1}^{n} = g_j(r)$. Remarquons que $g(r) = g(1/r)$ pour tout $r > 0$. Ainsi, on peut supposer que $r \geq 1$. On considère deux cas ; $r \geq n$ et $1 \leq r < n$.

Si $r \geq n$, alors $\min(\lceil jr \rceil, n) = n$ et $\min(\lceil j/r \rceil, n) = 1$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ainsi, $g_j(r) = n + 1$ pout tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Donc $g(r) = n(n+1) = n^2 + n$ qui implique que l'inégalité tient.

On considère maintenant le cas où $1 \leq r < n$. Soit $m = \lfloor n/r \rfloor$. Donc $jr \leq n$ pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, i.e. $\min(\lceil jr, \rceil, n) = \lceil jr \rceil$ et $jr \geq n$ pour tout $j \in \{m+1, \ldots, n\}$, i.e. $\min(\lceil jr \rceil, n) = n$. Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{n} \min(\lceil jr \rceil, n) = \sum_{j=1}^{m} \lceil jr \rceil + (n-m)n. \tag{3}$$

On s'intéresse maintenant à la deuxième somme $\sum_{j=1}^{n} \min\{\lceil j/r \rceil, n\}$.

Comme $r \geq 1$, $\min(\lceil j/r \rceil, n) \leq \min(\lceil n/r \rceil, n) \leq n$. Ainsi, $\min(\lceil j/r \rceil, n) = \lceil j/r \rceil$. Puisque $m = \lfloor n/r \rfloor$, $\lceil n/r \rceil \leq m + 1$. Comme $r > 1$, $m < n$, on a $m + 1 \leq n$. Donc $\min\{\lceil j/r \rceil, n\} = \lceil j/r \rceil \leq \lceil n/r \rceil \leq m + 1$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Pour tout entier positif $k \in \{1, \ldots, m+1\}$, on trouve le nombre d'entiers positifs $j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $\lceil j/r \rceil = k$. On note ce nombre par s_k.

Remarquons que $\lceil j/r \rceil = k$ si et seulement si $k - 1 < j/r \leq k$ si et seulement si $(k-1)r < j \leq \min(kr, n)$, puisque $j \leq n$. Nous traiterons les cas $k \in \{1, \ldots, m\}$ et $k = m + 1$ séparément. Si $k \in \{1, \ldots, m\}$, alors $\min(kr, n) = kr$, puisque $r \leq m$

et $m = \lfloor n/r \rfloor$. L'ensemble des entiers positifs j satisfaisant $(k-1)r < j \leq kr$ est $\{\lfloor (k-1)r \rfloor + 1, \lfloor (k-1)r \rfloor + 2, \ldots, \lfloor kr \rfloor\}$. Par conséquent,

$$s_k = \lfloor rk \rfloor - (\lfloor r(k-1) \rfloor + 1) + 1 = \lfloor rk \rfloor - \lfloor r(k-1) \rfloor$$

pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$. Si $k = m+1$, alors $(k-1)r < j \leq \min(kr, n) = n$. L'ensemble des entiers positifs j satisfaisant $(k-1)r < j \leq kr$ est $\{\lfloor (k-1)r \rfloor + 1, \ldots, n\}$. Alors $s_{m+1} = n - \lfloor r(k-1) \rfloor = n - \lfloor mr \rfloor$. Remarquons que ce nombre est positif par la définition de m. Ainsi, par la définition de s_k, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \min\left(\left\lceil \frac{j}{r} \right\rceil, n\right) &= \sum_{k=1}^{m+1} k s_k \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(k \left(\lfloor kr \rfloor - \lfloor (k-1)r \rfloor\right)\right) + (m+1)(n - \lfloor rm \rfloor) = (m+1)n - \sum_{k=1}^{m} \lfloor kr \rfloor.\end{aligned} \tag{4}$$

En prenant la somme de (**??**) et (**??**) on trouve que

$$g(r) = n^2 + n + \sum_{j=1}^{m} (\lceil jr \rceil - \lfloor jr \rfloor) \geq n^2 + n,$$

ce qui démontre l'inégalité de droite. $\square$

5. Soit O le centre du cercle circonscrit d'un triangle aigu ABC. Un cercle Γ passant par le sommet A croise les segments AB et AC aux points P et Q de façon à ce que $\angle BOP = \angle ABC$ et $\angle COQ = \angle ACB$. Montrez que la réflexion de BC par la droite PQ est tangente à Γ.

Solution. Soit R et B les points d'intersection du cercle circonscrit à OBP avec le côté BC et soit $\angle A$, $\angle B$ et $\angle C$ les angles aux sommets A, B et C respectivement.

On remarque ensuite que $\angle BOP = \angle B$ et $\angle COQ = \angle C$, et il s'ensuit que

$$\angle POQ = 360° - \angle BOP - \angle COQ - \angle BOC = 360° - (180 - \angle A) - 2\angle A = 180° - \angle A.$$

Ceci implique que $APOQ$ est un quadrilatère inscriptible dans un cercle. Puisque $BPOR$ est aussi inscriptible,

$$\angle QOR = 360° - \angle POQ - \angle POR = 360° - (180° - \angle A) - (180° - \angle B) = 180° - \angle C.$$

Ceci implique que $CQOR$ est un quadrilatère inscriptible dans un cercle. Puisque $APOQ$ et $BPOR$ le sont aussi,

$$\angle QPR = \angle QPO + \angle OPR = \angle OAQ + \angle OBR = (90° - \angle B) + (90° - \angle A) = \angle C.$$

Comme $CQOR$ est inscriptible, $\angle QRC = \angle COQ = \angle C = \angle QPR$ ce qui implique que le cercle circonscrit au triangle PQR est tangent à BC. De plus, puisque $\angle PRB = \angle BOP = \angle B$,

$$\angle PRQ = 180° - \angle PRB - \angle QRC = 180° - \angle B - \angle C = \angle A = \angle PAQ.$$

Ceci implique que le cercle circonscrit à PQR est la réflexion de Γ par la droite PQ. Par symétrie par la droite PQ, ceci implique que la réflexion de BC par la droite PQ est tangente à Γ.