Financière Sun Life

43^{e} Olympiade mathématique du Canada

Mercredi le 23 mars 2011

CMS
SMC

Problèmes et Solutions

(1) Considérer les nombres n à 70 chiffres avec la propriété que chacun des chiffres $1, 2, 3, \ldots, 7$ apparaît dix fois dans l'expension décimale de n (et que 8, 9 et 0 n'y apparaissent pas). Montrer qu'aucun nombre de cette forme ne peut être divisé par un autre nombre de la même forme.

Solution.
Supposons le contraire : ils existent a et b sous la forme prescrite, telle que $b \geq a$ et a divise b. Alors, a divise $b - a$.

Une affirmation : a n'est pas divisible par 3, mais $b - a$ est divisible par 9. En effet, la somme des chiffres est $10(1 + \cdots + 7) = 280$, à la fois pour a et b. [Ici, on a besoin de connaître ou de démontrer qu'un nombre entier n est équivalent à la somme de ses chiffres modulo 3 et modulo 9.]

Nous concluons que $b - a$ est divisible par $9a$. Mais cela est impossible, puisque $9a$ a 71 chiffres et b n'a que 70 chiffres, alors $9a > b > b - a$. $\square$

(2) Soient $ABCD$ un quadrilatère cyclique dont les côtés opposés ne sont pas parallèles, X l'intersection de AB et de CD, et Y l'intersection de AD et de BC. Supposons que la bissectrice de $\angle AXD$ intersecte AD, BC en E, F respectivement et que la bissectrice de $\angle AYB$ intersecte AB, CD en G, H respectivement. Montrer que $EGFH$ est un parallèlograme.

Solution. Puisque $ABCD$ est cyclique, $\Delta XAC \sim \Delta XDB$ et $\Delta YAC \sim \Delta YBD$. Donc,

$$\frac{XA}{XD} = \frac{XC}{XB} = \frac{AC}{DB} = \frac{YA}{YB} = \frac{YC}{YD}.$$

Soit s ce rapport. Donc, par le théorème de la bissectrice,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{XA}{XD} = \frac{XC}{XB} = \frac{CF}{FB} = s,$$

et

$$\frac{AG}{GB} = \frac{YA}{YB} = \frac{YC}{YD} = \frac{CH}{HD} = s.$$

Alors, $\frac{AG}{GB} = \frac{CF}{FB}$ et $\frac{AE}{ED} = \frac{DH}{HC}$. Donc, $EH||AC||GF$ et $EG||DB||HF$. Alors, $EGFH$ est un parallélogramme. $\square$

(3) Amy a divisé un carré en un nombre fini de plusieurs rectangles blancs et rouges, chacun ayant les côtés parallèles aux côtés du carré. À l'intérieur de chaque rectangle blanc, elle écrit sa largeur divisée par sa hauteur. À l'intérieur de chaque rectangle rouge, elle écrit sa hauteur divisée par sa largeur. Finalement, elle calcule x, la somme de tous ces nombres. Si l'aire totale des rectangles blancs égale l'aire totale des rectangles rouges, quelle est la plus petite valeur de x possible?

Solution. Soient a_i et b_i la largeur et la hauteur de chaque rectangle blanc, et soient c_i et d_i la largeur et la hauteur de chaque rectangle rouge. Aussi, soit L la longueur des côtés du carré initial.

Lemme: Soit $\sum a_i \geq L$ ou $\sum d_i \geq L$.

Démonstration du lemme: Supposons qu'il existe un segment de droite horizontale au travers du carré qui est entièrement recouvert de rectangles blancs. La largeur totale de ces rectangles est au moins L, et le lemme est démontré. Sinon, il y a un rectangle rouge qui croise chaque segment de droite horizontal, et alors la hauteur totale de ces rectangles est au moins L. $\square$

Maintenant, supposons, sans perte de généralité que $\sum a_i \geq L$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \left(\sum \frac{a_i}{b_i}\right) \cdot \left(\sum a_i b_i\right) &\geq \left(\sum a_i\right)^2 \\ &\geq L^2. \end{aligned}$$

Mais nous savons que $\sum a_i b_i = \frac{L^2}{2}$, il s'ensuit donc que $\sum \frac{a_i}{b_i} \geq 2$. En outre, chaque $c_i \leq L$, alors

$$\sum \frac{d_i}{c_i} \geq \frac{1}{L^2} \cdot \sum c_i d_i = \frac{1}{2}.$$

Donc, x est au moins 2,5. L'égalité$x = 2{,}5$ peut être atteint en utilisant une seule couleur dans la moitié supérieure du carré, et en utilisant l'autre couleur dans la moitié inférieure du carré. $\square$

(4) Démontrer qu'il existe un entier positif N tel que pour tout entier $a > N$, il existe une sous-chaîne contiguë de l'expansion décimale de a qui est divisible par 2011. (Par exemple, si a =153204, alors 15, 532, et 0 sont toutes des sous-chaînes contiguës de a. Notez bien que 0 est divisible par 2011.)

Solution. Nous affirmons que si le développement décimal de a compte au moins 2012 chiffres, alors a contient la sous-chaîne requise. Soit $a_k a_{k-1} \ldots a_0$ le développement décimal de a. Pour $i = 0, \ldots, 2011$, soit b_i le nombre avec le développement décimal

$a_i a_{i-1} \dots a_0$. Par le principe des tiroirs, $b_i \equiv b_j \mod 2011$ pour certains $i < j \leq 2011$. Il s'ensuit que 2011 divise $b_j - b_i = c \cdot 10^i$, où c est la sous-chaîne $a_j \dots a_{i+1}$. Puisque 2011 et 10 sont premiers entre eux, alors 2011 divise c. □

(5) Soit d un entier positif. Démontrer que, pour tout entier S, il existe un entier $n > 0$ et une suite $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, où pour tout k, $\epsilon_k = 1$ ou $\epsilon_k = -1$, tel que

$$S = \epsilon_1(1+d)^2 + \epsilon_2(1+2d)^2 + \epsilon_3(1+3d)^2 + \cdots + \epsilon_n(1+nd)^2.$$

Solution. Soit $U_k = (1+kd)^2$. En calculant la valeur de $U_{k+3} - U_{k+2} - U_{k+1} + U_k$, on trouve la valeur constante $4d^2$. En changeant le signe, on obtient la somme $-4d^2$.

Ainsi on obtient une expression du type qu'on désire pour $S_0 + (4d^2)q$ et pour tout entier q aussitôt qu'on trouve une expression pour un certain nombre S_0 du type désiré.

Il reste à montrer que pour tout S, il existe un entier S' tel que $S' \equiv S \pmod{4d^2}$ et S' peut être exprimé sous la forme désirée. Considérer la somme

$$(1+d)^2 + (1+2d)^2 + \cdots + (1+Nd)^2,$$

où N is "assez grand." Sans perdre la généralité, on peut toujours choisir N de sorte que la somme est soit paire, soit impaire.

En changeant le signe devant $(1+kd)^2$ au négative, la somme décroit de $2(1+kd)^2$. En particulier, si $k \equiv 0 \pmod{2d}$, la somme décroit de 2 (modulo $4d^2$). Alors

Si N est assez grand, on peut choisir plusieurs $k < N$ tels que k est un multiple de $2d$. En interchangeant les signes devant r de ces valeurs, on change ("en bas") la classe de congruence modulo $4d^2$ par $2r$. En choisissant N de sorte que la somme originale est impaire et une valeur convenable de $r < 2d^2$, on peut obtenir des nombres qui sont congrus à tous les nombres impairs modulo $4d^2$. En choisissant N de sorte que la somme originale est paire, on peut obtenir des nombres qui sont congrus à tous les nombres pairs modulo $4d^2$. Ceci termine la preuve. □