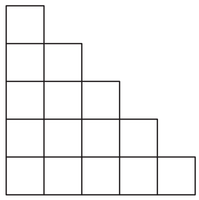
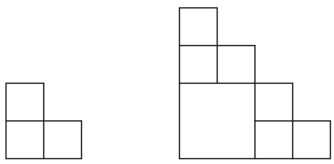
L'OLYMPIADE MATHÉMATIQUE DU CANADA 2010
PROBLÈMES ET SOLUTIONS

(1) Pour un nombre entier positif n, un *n-escalier* est une figure composée de carrés unitaires, avec un carré dans la première rangée, deux carrés dans la deuxième rangée, et ainsi de suite, jusqu'à n carrés dans la $n$ième rangée, où les carrés les plus à gauche dans chaque rangée sont alignés verticalement. Par exemple, le 5-escalier est illustré ci-dessous.



Soit $f(n)$ le nombre minimal de tuiles carrées requises pour couvrir un n-escalier, où les longueurs des côtés des tuiles carrées peuvent être n'importe quel nombre entier positif. Par exemple, $f(2) = 3$ et $f(4) = 7$.



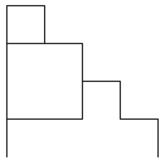
(a) Trouver tous les n tel que $f(n) = n$.
(b) Trouver tous les n tel que $f(n) = n + 1$.

Solution. (a) Un carré *diagonal* dans un n-escalier est un carré unitaire le long de la diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit. Un *recouvrement minimal* d'un n-escalier est un recouvrement qui utilise $f(n)$ tuiles carrées.

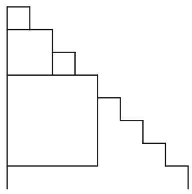
Remarquer que $f(n) \geq n$ pour tout n. Il y a n carrés diagonaux dans un n-escalier, et une tuile carrée peut couvrir au plus un carré diagonal, ce qui signifie que chaque recouvrement utilise au moins n tuiles carrées. En d'autres mots, $f(n) \geq n$. Alors, si $f(n) = n$, chaque tuile carrée couvre exactement un carré diagonal.

Soit n un entier positif tel que $f(n) = n$, et considérer un recouvrement minimal d'un n-escalier. La seule tuile carrée qui peut couvrir le carré unitaire à la première rangée est le carré unitaire lui-même.

Considérer maintenant le carré unitaire à l'extrême gauche dans la deuxième rangée. La seule tuile carrée qui peut couvrir ce carré unitaire et un carré diagonal est une tuile carrée 2×2.



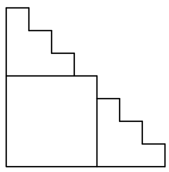
Considérer ensuite le carré unitaire à l'extrême gauche dans la quatrième rangée. La seule tuile carrée qui peut couvrir ce carré unitaire et et un carré diagonal est une tuile carrée 4×4.



En continuant cette construction, nous voyons que les longueurs des côtés des tuiles carrées utilisées seront 1, 2, 4, ainsi de suite, jusqu'à 2^k pour un certain nombre entier non négatif k. Par conséquent, la hauteur n du n-escalier est égale à $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Alternativement, $n = 2^k - 1$ pour un certain nombre entier positif k. Soit $p(k) = 2^k - 1$.

Réciproquement, nous pouvons couvrir un $p(k)$-escalier avec $p(k)$ tuiles carrées récursivement comme suit : Nous avons que $p(1) = 1$, et nous pouvons couvrir un 1-escalier avec 1 tuile carrée. Supposer que nous pouvons couvrir un $p(k)$-escalier avec $p(k)$ tuiles carrées pour un certain nombre entier positif k.

Considérer un $p(k+1)$-escalier. Placer une tuile carrée $2^k \times 2^k$ dans le coin inférieur gauche. Noter que cette tuile carrée couvre un carré diagonal. Alors $p(k+1) - 2^k = 2^{k+1} - 1 - 2^k = 2^k - 1 = p(k)$, ce qui nous laisse deux $p(k)$-escaliers.

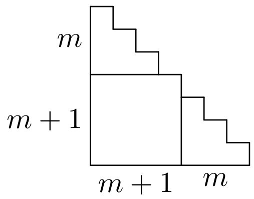


De plus, ces deux $p(k)$-escaliers peuvent être couverts avec $2p(k)$ tuiles carrées, ce qui veut dire qu'on utilise $2p(k) + 1 = p(k+1)$ tuiles carrées.

Alors, $f(n) = n$ si et seulement si $n = 2^k - 1 = p(k)$ pour un certain nombre entier positif k. En d'autres mots, la représentation binaire de n consiste à des 1 seulement, pas des 0.

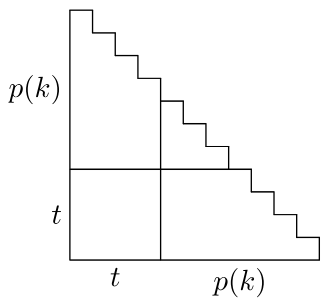
(b) Soit n un nombre entier positif tel que $f(n) = n + 1$, et considérer un recouvrement minimal d'un n-escalier. Comme il y a n carrés diagonaux, chaque tuile carrée sauf une seule couvre un carré diagonal. Montrons que la tuile carrée qui couvre le carré unitaire à l'extrême gauche doit être la tuile carrée qui ne couvre pas un carré diagonal.

Si n est pair, alors ce fait est évident comme la tuile carrée qui couvre le carré unitaire à l'extrême gauche ne peut couvrir aucun carré diagonal. On peut donc supposer que n est impair. Posons $n = 2m+1$. On peut supposer que $n > 1$, ce qui donne que $m \geq 1$; supposons que la tuile carrée qui couvre le carré unitaire à l'extrême gauche couvre aussi un carré diagonal. Alors la longueur du côté de cette tuile carrée doit être $m+1$. Après ceci, $(m+1) \times (m+1)$ tuiles carrées sont placées, ce qui nous laisse deux m-escaliers.

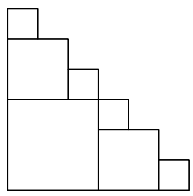


Alors, $f(n) = 2f(m) + 1$. Mais $2f(m) + 1$ est impair, et $n + 1 = 2m + 2$ is pair, alors $f(n)$ ne peut être égal à $n+1$, une contradiction. D'où, la tuile carrée qui couvre le carré unitaire au coin inférieur gauche doit être la tuile carrée qui ne couvre pas un carré diagonal.

Soit t la longueur des côtés de la tuile carré qui couvre le carré unitaire au coin inférieur gauche. Alors chaque autre tuile carrée doit couvrir un carré diagonal, ainsi par la même construction qu'à la partie (a), $n = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} + t = 2^k + t - 1$ pour un certain nombre entier positif k. De plus, les premières $p(k) = 2^k - 1$ rangées du n-escalier doivent être couvertes de la même manière que le recouvrement minimal d'un $p(k)$-escalier. Par conséquent, la ligne horizontale entre les rangées $p(k)$ et $p(k)+1$ ne traverse aucune tuile carrée. Appelons une telle ligne une *ligne de fracture*. De même, la ligne verticale entre les colonnes t et $t+1$ est également une ligne de fracture. Ces deux lignes de fracture divisent deux $p(k)$-escaliers.



Si ces deux $p(k)$-escaliers ne se chevauchent pas, alors $t = p(k)$, d'où $n = 2p(k)$. Par exemple, le recouvrement minimal pour $n = 2p(2) = 6$ est illustré.



Supposons alors que les deux $p(k)$-escaliers se chevauchent. L'intersection des deux $p(k)$-escaliers est un $[p(k) - t]$-escalier. Comme ce $[p(k) - t]$-escalier est couvert de la même manière que les premières $p(k)$ rangées d'un recouvrement minimal d'un $p(k)$-escalier, $p(k) - t = p(l)$ pour certain entier positif $l < k$, ainsi $t = p(k) - p(l)$. Ensuite,

$$n = t + p(k) = 2p(k) - p(l).$$

Comme $p(0) = 0$, on peut récapituler en disant que n doit être de la forme

$$n = 2p(k) - p(l) = 2^{k+1} - 2^l - 1,$$

où k est un nombre entier et l est un nombre entier non négatif. En outre, notre argument montre que si n est de cette forme, alors un n-escalier peut être couvert avec $n + 1$ tuiles carrées.

Finalement, on remarque que n est de cette forme si et seulement si la représentation binaire de n contient exactement un 0:

$$2^{k+1} - 2^l - 1 = \underbrace{11\ldots1}_{k-l \text{ 1s}}0\underbrace{11\ldots1}_{l \text{ 1s}}.$$

□

(2) Soit A, B, P trois points sur un cercle. Montrez que si a et b sont les distances de P aux tangentes à A et B et si c est la distance de P à la corde AB, alors $c^2 = ab$.

Solution. Soit r le rayon du cercle, et soit a' et b' les longueurs respectives de PA et PB. Comme $b' = 2r \sin \angle PAB = 2rc/a'$, $c = a'b'/(2r)$. Soit AC le diamètre du cercle et soit H le pied de la perpendiculaire de P à AC. Comme les deux triangles ACP et APH sont semblables, on obtient que $AH : AP = AP : AC$ ou $(a')^2 = 2ra$. De façon similaire, $(b')^2 = 2rb$. Alors

$$c^2 = \frac{(a')^2}{2r}\frac{(b')^2}{2r} = ab.$$

□

Solution alternative. Soit E, F, G les pieds des perpendiculaires aux tangentes en A et B et la corde AB, respectivemnent. On doit montrer que $PE : PG = PG : GF$, où G est le pied de la perpendiculaire de P à AB. Ceci suggère qu'on essaie de montrer que les triangles EPG et GPF sont semblables.

Comme PG est parallèle à la bissectrice de l'angle entre les deux tangentes, $\angle EPG = \angle FPG$. Comme $AEPG$ et $BFPG$ sont des quadrilatères cycliques (les angles opposés sont supplémentaires), $\angle PGE = \angle PAE$ et $\angle PFG = \angle PBG$. Mais $\angle PAE = \angle PBA = \angle PBG$, d'où $\angle PGE = \angle PFG$. Alors, les triangles EPG et GPF sont semblables.

L'argument ci-dessus avec les quadrilatères cycliques est valide seulement dans le cas où P est sur l'arc le plus court entre A et B. Un argument similaire existe pour l'autre cas.

□

(3) Trois patineurs de vitesse participent à une course amicale sur un anneau de glace. Ils partent du même point et patinent dans la même direction, mais à des vitesses différentes qu'ils maintiennent tout au long de la course. Le plus lent patine 1 tour de piste par minute, le plus rapide patine 3,14 tours de piste par minute, et celui du milieu patine L tours de piste par minute où $1 < L < 3{,}14$. La course se termine au moment où les trois patineurs sont à nouveau ensemble au même point sur l'ovale (qui peut être différent du point de départ.) Déterminer le nombre de différentes valeurs possibles de L pour lesquelles 117 dépassements surviennent avant la fin de la course. (Un dépassement est réalisé quand un patineur dépasse un autre. Le début et la fin de la course lorsque les trois patineurs sont ensemble ne sont pas comptés comme des dépassements.)

Solution. Supposons que la longueur de l'ovale est une unité. Soit $x(t)$ la différence entre les distances patinées par le patineur le plus rapide et celui le plus lent au temps t. Similairement, soit $y(t)$ soit la différence entre le patineur moyen et le patineur le plus lent. Le chemin $(x(t), y(t))$ est un rayon droit R dans $\mathbb{R}^2$ qui commence à l'origine, avec une pente qui dépend de L. Par définition, $0 < y(t) < x(t)$.

Un patineur dépasse un autre lorsque $x(t) \in \mathbb{Z}$, $y(t) \in \mathbb{Z}$ ou $x(t) - y(t) \in \mathbb{Z}$. La course se termine losque $x(t), y(t) \in \mathbb{Z}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ le point terminal du rayon R. On a besoin de trouver le nombre de tels point qui satisfont:

(a) $0 < b < a$

(b) Le rayon R intersecte $\mathbb{Z}^2$ aux points extrémités seulement.

(c) Le rayon R croise les droites $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, $y - x \in \mathbb{Z}$ 357 fois.

La deuxième condition indique que a et b sont premiers entre eux. Le rayon R croise $a - 1$ des lignes $x \in \mathbb{Z}$, $b - 1$ des lignes $y \in \mathbb{Z}$ et $a - b - 1$ des lignes $x - y \in \mathbb{Z}$. Ainsi, il faut que $(A-1)+(b-1)+(a-b-1) = 117$, ou d'une manière équivalente, $2a - 3 = 117$. C'est-à-dire $a = 60$.

Maintenant b doit être un nombre entier positif inférieur à et relativement premier avec 60. Le nombre des tels b peut être trouvé en utilisant la fonction ϕ d'Euler:

$$\phi(60) = \phi(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = (2-1) \cdot 2 \cdot (3-1) \cdot (5-1) = 16.$$

la réponse est ainsi 16.

□

Solution alternative. Tout d'abord identifions nos patineurs avec des noms. Du plus rapide au plus lent, nous avons : A, B et C. (Abel, Bernoulli et Cayley?) Maintenant, envisageons la course du point de vue de C. Par rapport à C, A et B ont complété un nombre entier de tours, puisque ces deux débutent et finissent à C. Soient n le nombre de tours effectués par A par rapport à C et m le nombre de tours effectués par B par rapport à C. Noter bien que $n > m \in \mathbb{Z}^+$. Considérons le nombre de minutes nécessaires pour terminer la course. Par rapport à C, A

est en mouvement à une vitesse de 3,14 − 1 = 2,14 tours par minute et termine la course en $\frac{n}{2{,}14}$ minutes. Aussi par rapport à C, B se déplace à une vitesse de $(L-1)$ tours par minute et termine la course en $\frac{m}{L-1}$ minutes. Puisque A et B terminent la course ensemble (quand ils rencontrent à la fois C) :

$$\frac{n}{2.14} = \frac{m}{L-1} \qquad \Rightarrow \qquad L = 2.14\left(\frac{m}{n}\right) + 1.$$

Par conséquent, il existe une correspondance bijective entre les valeurs de L et les valeurs de la fraction propre positive $\frac{m}{n}$. La fraction doit être irréductible, c'est-à-dire le couple (m, n) devrait être relativement premier, sinon, avec $k = \text{pgcd}(m, n)$, la course se termine après n/k tours pour A et m/k tours pour B quand ils rencontrent C ensemble pour la première fois. Il est aussi utile d'envisager la course du point de vue de B. Dans ce cadre de référence, A termine seulement nm tours. D'où A *dépasse* B seulement $(nm) - 1$ fois, car il n'y pas de dépassement à la fin de la course (ni au début). De même A dépasse C seulement $n - 1$ fois et B dépasse C seulement $m - 1$ fois. Le nombre total de dépassements est :

$$117 = (n-1) + (m-1) + (n-m-1) = 2n-3 \quad \Rightarrow \quad n = 60.$$

Ainsi, le nombre de valeurs de L est égal au nombre de m tel que la fraction $\frac{m}{60}$ est positive, propre et irréductible. C'est le nombre d'entiers positifs inférieurs et relativement premier à 60. On pourrait simplement compter: $\{1, 7, 11, 13, 17, \cdots\}$, mais la fonction ϕ d'Euler donne ce nombre :

$$\phi(60) = \phi(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = (2-1) \cdot 2 \cdot (3-1) \cdot (5-1) = 16.$$

Par conséquent, il y a 16 valeurs de L, qui donne le nombre souhaité de dépassements. Noter bien que les valeurs réelles des vitesses de A et C n'affectent pas le résultat. Elles pourraient être des valeurs rationnelles ou irrationnelles, tout autant qu'elles soient différentes, et il y a 16 valeurs possibles pour la vitesse de B entre elles. □

(4) Les sommets d'un graphe fini peuvent être coloriés, soit en noir ou en blanc. Au départ, tous les sommets sont noirs. Il est permis de choisir un sommet P et de changer la couleur de P et de l'ensemble de ses voisins. Est-il possible de changer la couleur de tous les sommets de noir à blanc avec une suite d'opérations de ce type?

(Un graphe fini se compose d'un ensemble fini de sommets et d'un ensemble fini d'arêtes entre les sommets. S'il y a une arête entre le sommet A et le sommet B, alors B est dit un voisin de A.)

Solution. La réponse est oui. On fait une preuve par induction sur le nombre n de sommets. Si $n = 1$, c'est évident. Pour l'hypothèse d'induction, supposons que nous pouvons le faire pour tout graphe ayant $n - 1$ sommets pour $n \geq 2$ et que X est un graphe à n sommets que nous noterons par $P_1, \ldots, P_n$.

Notons l'opération simple de changer la couleur de P_i et de tous ses voisins par

f_i. Avec la suppression d'un sommet P_i de X (avec toutes les arêtes incidentes à P_i) et en appliquant l'hypothèse d'induction au plus petit graphe résultant, il existe une suite d'opérations g_i (obtenue en composant certain f_j, avec $j \neq i$) qui change la couleur de chaque sommet dans X, à l'exception peut-être de P_i. Si g_i modifie également la couleur de P_i alors c'est tout. Ainsi, on peut supposer que g_i ne change pas la couleur de P_i pour tout $i = 1, \dots, n$. Considérons maintenant deux cas.

Cas 1: n est pair. Alors la composition des opérations $g_1, \dots, g_n$ change la couleur de chaque sommet du blanc au noir.

Cas 2: n est impair. Montrons que dans ce cas X a un sommet avec un nombre pair de voisins.

En effet, désignons le nombre de voisins de P_i (ou de manière équivalente, le nombre d'arêtes incidentes à P_i) par k_i. Alors $k_1 + \cdots + k_n = 2e$, où e est le nombre d'arêtes de X. Ainsi, un des nombres k_i doit être pair.

Après renumération des sommets, on peut supposer que P_1 a $2k$ voisins, par exemple $P_2, \dots, P_{2k+1}$. La composition de f_1 avec $g_1, g_2, \dots, g_{2k+1}$ change la couleur de chaque sommet comme nous le souhaitons.

□

(5) Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes à coefficients entiers et soit $a_n = n! + n$. Montrer que si $P(a_n)/Q(a_n)$ est un entier pour tout n, alors $P(n)/Q(n)$ est un entier pour tout entier n tel que $Q(n) \neq 0$.

Solution. Supposer qu'on divise $P(x)$ par $Q(x)$. On trouve que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

où $A(x)$ et $R(x)$ sont des polynômes à coefficients rationnels et $R(x)$ est un polynôme identiquement nul ou de degré inférieur à celui de $Q(x)$.

En écrivant les coefficients de $A(x)$ avec leur plus petit commun multiple, on peut trouver un polynôme $B(x)$ à coefficients rationnels et un entier positif b tels que $A(x) = B(x)/b$. Supposer tout d'abord que $R(x)$ n'est pas identiquement nul. Noter que pour tout entier k, $A(k) = 0$ ou $|A(k)| \geq 1/b$. Mais si $|k|$ est assez grand, $0 < |R(k)/Q(k)| < 1/b$, et alors si n est assez grand, $P(a_n)/Q(a_n)$ ne peut pas être un entier.

Donc $R(x)$ est identiquement nul, et $P(x)/Q(x) = B(x)/b$ (au moins lorsque $Q(x) \neq 0$.)

Maintenant, soit n un entier. Alors il y a une infinité des entiers k tels que $n \equiv a_k \pmod{b}$. Mais $B(a_k)/b$ est un entier, ou d'une manière équivalente b divise $B(a_k)$. Il s'en suit que b divise $B(n)$, et alors $P(n)/Q(n)$ est un entier. □