CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD 2009
SOLUTIONS

PROBLÈME 1. Étant donné une grille m × n de carrés colorés en noir ou blanc, nous disons qu'un carré noir est bloqué s'il y a un carré blanc à sa gauche dans la même rangée et il y a un carré blanc au-dessus de ce carré noir dans la même colonne (voir la Figure 1).

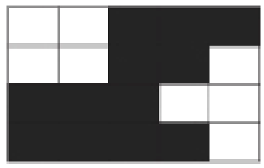

FIGURE 1. Une grille 4 × 5 sans carré noir bloqué

Trouver une expression analytique pour le nombre de grille $2 \times n$ sans carré noir bloqué.

Solution. Il n'y a aucune condition pour les carrés à la première rangée. Un carré dans la deuxième rangée peut être noir seulement si le carré au-dessus est noir ou tous les carrés à sa gauche sont noirs. Supposons que les premiers k carrés dans la deuxième rangée sont noirs et le (k +1)-ième carré est blanc ou $k = n$. Dans le cas où $k < n$, on a deux choix pour chacun des premiers (k + 1) carrés à la première rangé, et trois choix pour chacune des $(n\text{-}k\text{-}1)$ colonnes qui restent. Dans le cas où $k = n$, il y a 2^n choix pour la première rangée. Le nombre total de choix est alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} 3^{n-k-1} + 2^n.$$

Cette expression se simplifie davantage :

$$2 \cdot 3^n - 2^n.$$

CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD 2009 SOLUTIONS

PROBLÈME 2. Découpez deux cercles en carton de différents rayons. Chaque cercle est subdivisé en 200 secteurs égaux. Sur chaque cercle 100 secteurs sont peints en blanc et les autres 100 secteurs sont peints en noir. Le plus petit cercle est placé sur le plus grand cercle, de sorte que leurs centres coïncident. Démontrez qu'on peut pivoter le petit cercle afin que les secteurs sur les deux cercles s'alignent et qu'au moins 100 secteurs sur le petit cercle se trouvent au-dessus des secteurs de la même couleur sur le grand cercle.

Solution. Soient $x_0, \ldots, x_{199}$ des variables. On associe à x_i la valeur +1 si le (i+1)ème segment du plus grand cercle (dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre) est noir et la valeur -1 s'il est blanc. De la même façon, on associe les valeurs +1 ou -1 à la variable y_i selon si le (i+1)ème segment du plus petit cercle est noir ou balnc, respectivement. Le problème devient ainsi équivalent au problème suivant : montrer que

$$S_j = \sum_{i=1}^{200} x_i y_{i} + j \geq 0,$$

Pour un certain $j = 0, \ldots, 199$. Ici l'indice $i + j$ est pris 200. Remarquons maintenant que $y_0 + \cdots + y_{199} = 0$, d'où

$$S_0 + \cdots + S_{199} = \sum_{I=0}^{199} x_i (y_0 + \cdots + y_{199}) = 0.$$

Ainsi $S_j \geq 0$ pour un certain $j = 0, \ldots, 199$.

CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD 2009 SOLUTIONS

PROBLÈME 3. Soit

$$f(x, y, z) = \frac{(xy + yz + zx)(x + y + z)}{(x + y)(x + z)(y + z)}.$$

Déterminer l'ensemble des nombres réels r pour lesquels il existe un triplet (x, y, z) de nombres réels positifs tels que $f(x, y, z) = r$.

Solution. On montre que $1 \prec f(x,y,z) \leq \frac{9}{8}$, et que $f(x, y, z)$ peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $\left(1, \frac{9}{8}\right]$.

L'expression de $f(x, y, z)$ peut être simplifiée pour avoir la forme suivante :

$$f(x,y,z) = 1 + \frac{xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

Comme x, y, z sont positifs, on a que $1 < f(x, y, z)$.

L'inégalité $f(x,y,z) \leq \frac{9}{8}$, peut être réduite à

$$x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y - 6xyz \geq 0.$$

En réécrivant le côté gauche comme suit:

$$\begin{gathered} x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y - 6xyz = \\ x(y^2 + z^2) - 2xyz + y(x^2 + z^2) - 2xyz + z(x^2 + y^2) - 2xyz = \\ x(y - z)^2 + y(x - z)^2 + z(x - y)^2 \end{gathered}$$

on remarque que cette expression est clairement non négative lorsque x, y, z sont non négatifs. Pour montrer que $f(x, y, z)$ peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $\left(1, \frac{9}{8}\right]$, on définit

$$g(t) = f(t,1,1) = 1 + \frac{t}{2(1+t)^2}.$$

Alors $g(1) = \frac{9}{8}$ et $g(t)$ tend vers 1 lorsque t tend vers 0. Comme la fonction $g(t)$ est continue pour $0 < t \leq 1$, elle prend toute valeur dans l'intervalle $\left(1, \frac{9}{8}\right]$ (Une autre façon consiste à vérifier que l'équation quadratique $g(t) = r$ admet une solution t pour toute valeur r dans l'intervalle $\left(1, \frac{9}{8}\right]$)

CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD 2009 SOLUTIONS

PROBLÈME 4. Trouver toutes les paires ordonées (a, b) où a et b sont des entiers et $3^a + 7^b$ est un carré parfait.

Solution. Clairement a et b sont non négatifs.

Écrivons $3^a + 7^b = n^2$. On peut supposer que n est positif. Si on prend l'équation $3^a + 7^b = n^2$ modulo 4, on trouve que

$$n^2 \equiv (-1)^a + (-1)^b \pmod 4.$$

Comme un carré n'est jamais congru à 2 modulo 4, seulement deux cas sont alors possibles (i) a est impair et b est pair ou (ii) a est pair et b est impair.

Cas(i): Écrivons $b = 2c$. Alors

$$3^a = (n-7^c)(n+7^c)$$

Comme il n'est pas possible que 3 divise $n-7^c$ et $n+7^c$ en même temps, ces deux expressions doivent être des puissances de 3. Il s'en suit que $n-7^c = 1$, et donc $3^a = 2.7^c + 1$. Si $c = 0$, alors $a = 1$, et on obtient la solution $a = 1$, $b = 0$. Supposons maintenant que $c \geq 1$. On a $3^a \equiv 1 \pmod 7$, ce qui est impossible car la plus petite valeur de a telle que $3^a \equiv 1 \pmod 7$ est donnée par $a = 6$, par conséquence, toutes les valeurs de a telles que $3^a \equiv 1 \pmod 7$ sont paires, contradiction au fait que a est impair.

Cas (ii): Écrivons $a = 2c$. Alors

$$7^b = (n-3^c)(n+3^c) \quad .$$

Comme le cas (i), chacune des expressions $n-3^c$ et $n+3^c$ est une puissance de 7. Comme 7 ne les divise pas en même temps, $n-3^c = 1$, et alors

$$7^b = 2.3^c + 1.$$

Considérons tout d'abord le cas $c = 1$. Dans ce cas $b = 1$, et on obtient la solution $a = 2$, $b = 1$. On suppose ensuite que $c > 1$. Alors $7^b \equiv 1 \pmod 9$. Le plus petit entier positive b tel que $7^b \equiv 1 \pmod 9$ est donné par $b = 3$. Il s'en suit que b doit être un multiple de3. Soit $b = 3d$. Noter que d est impair, donc en particulier $d \geq 1$. Posons $y = 7^d$. Alors $y^3 - 1 = 2.3^c$, et par suite

$$2.3^c = (y-1)(y^2+y+1) \quad .$$

Il s'en suit que $y-1 = 2.3^u$ pour un certain u positif, et que $y^2+y+1 = 3^v$ $y-1 = 2.3^u$ pour un certain $v \geq 2$. Mais comme

$$3y = (y^2+y+1) - (y-1)^2 \quad ,$$

3 divise y, ce qui est impossible car 3 divise $(y-1)$.

CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD 2009 SOLUTIONS

PROBLÈME 5. On marque un ensemble de points dans le plan, avec la propriété que n'importe quels trois points marqués peuvent être couverts par un disque de rayon 1. Montrer que l'ensemble de tous les points marqués peut être couvert par un disque de rayon 1.

Solution. (Pour un ensemble fini de points seulement.) Soit D un disque de rayon minimal qui couvre tous les points marqués. Considérer les points marqués sur la circonférence C de ce disque. Noter que si tous les points marqués sur C se trouvent sur un arc plus petit que le demi-cercle (qu'on note par APPQLDC), alors le disque peut être légèrement déplacé vers ces points sur la circonférence et son rayon peut être diminué. Comme on a supposé que le rayon du disque est minimal, les points marqués sur sa circonférence ne se trouvent pas sur un APPQLDC.

Si les deux points extrémités d'une diagonale de D sont marqués, alors D est le plus petit disque contenant ces deux points, par conséquent doit avoir un rayon tout inférieur ou égale à 1.

S'il y a 3 points marqués sur C qui ne se trouvent pas sur un ASTTHC, alors D est le plus petit disque couvrant ces 3 points et par conséquent doit avoir un rayon tout inférieur ou égal à 1. (Dans ce cas, le triangle formé par les trois points est aiguë et C est son cercle circonscrit.)

S'il y a plus de 3 points marqués sur la circonférence qui ne se trouvent pas sur un APPQLDC, alors on peut enlever un d'eux de sorte que les points restants ne se trouvent pas aussi sur un APPQLDC. Par induction ceci nous mène au cas de 3 points. En effet, si on a 4 points ou plus sur C, on peut choisir 3 points qui se trouvent sur un demi-cercle. Alors le point au milieu peut être enlevé.