40e Olympiade mathématique du Canada

Mercredi le 26 mars, 2008

Solutions - OMC 2008

1. $ABCD$ est un quadrilatère convexe dans lequel AB est le côté le plus long. Les points M et N sont situés sur les côtés AB et BC respectivement, de sorte que chacun des segments AN et CM divise le quadrilatère en deux parties de même aire. Montrez que le segment MN coupe la diagonale BD en deux parties égales.

Solution. Comme $[MADC] = \frac{1}{2}[ABCD] = [NADC]$, on a que $[ANC] = [AMC]$, et par suite $MN \| AC$. Soit m une droite passant par D et parallèlle à AC et MN et soit P le point d'intersection de m avec le prolongement de la droite AB et Q celui de m avec le prolongement de la droite BC. Alors

$$[MPC] = [MAC] + [CAP] = [MAC] + [CAD] = [MADC] = [BMC]$$

d'où $BM = MP$. De même, $BN = NQ$, et par conséquence MN est une droite joignant les milieux de deux côtés dans le triangle BPQ; elle doit alors couper le côté BC en deux parties égales.

2. Déterminer toutes les fonctions f définies sur l'ensemble des nombres rationnels et qui prennent des valeurs rationnelles telles que

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + y \ ,$$

pour tous les nombres rationnels x et y.

Solution 1. Les seules solutions sont $f(x) = x$ et $f(x) = -x$ pour tout nombre rationnel x . Il est facile de vérifier que ces deux fonctions sont des solutions.

Si $y = x$, on obtient $f(3f(x)) = 3x$ pour tout nombre rationnel x. La substitution $y = x = 3f(x)$ dans la deuxième égalité donne

$$f(9x) = f(3f(3f(x)) = 3[3f(x)] = 9f(x) \ ,$$

pour tout nombre rationnel x. En posant $x = 0$ on obtient $f(0) = 9f(0)$, d'où $f(0) = 0$.

En posant $x = 0$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient $f(f(y)) = y$ pour tout nombre rationnel y. Alors f est injective et surjective. En appliquant la fonction f à l'équation fonctionnelle, on obtient

$$2f(x) + f(y) = f(2x + y)$$

pour chaque couple (x, y) de nombres rationnels.

En posant $y = 0$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient $f(2f(x)) = 2x$, d'où $2f(x) = f(2x)$. Alors $f(2x) + f(y) = f(2x + y)$ pour chaque couple (x, y) de nombres rationnels, et par conséquent

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

pour chaque couple (u, v) de nombres rationnels.

Comme $0 = f(0) = f(-1) + f(1)$, $f(-1) = -f(1)$. On peut établir par induction que $f(nx) = nf(x)$ pour chaque entier n et pour chaque nombre rationnel x. Si $k = f(1)$, on peut déduire que $f(n) = nk$, $f(1/n) = k/n$ et $f(m/n) = mk/n$ pour chaque couple (m, n). Alors $f(x) = kx$ pour tout nombre rationnel x. Comme $f(f(x)) = x$, on doit avoir $k^2 = 1$. Alors $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$.

Solution 2. Dans l'équation fonctionnelle, posons

$$x = y = 2f(z) + f(w).$$

Alors $f(x) = f(y) = 2z + w$ et

$$f(6z + 3w) = 6f(z) + 3f(w)$$

pour toutes les couples (z, w) des nombres rationnels. Si $(z, w) = (0, 0)$, on obtient $f(0) = 0$, et si $w = 0$ on obtient $f(6z) = 6f(z)$. Si $z = 0$ on obtient $f(3w) = 3f(w)$ pour tous les nombres rationnels z et w. D'où $f(6z + 3w) = f(6z) = f(3w)$. En remplaçant $(6z, 3w)$ par (u, v) on obtient

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

pour toutes les couples (z, w) des nombres rationnels. Alors $f(x) = kx$ où $k = f(1)$ pour tout nombre rationnel x. La Substitution dans l'équation fonctionnelle avec $(x, y) = (1, 1)$ donne $3 = f(3f(1)) = f(3k) = 3k^2$, d'où $k = \pm 1$. On peut vérifier que chacune des fonctions $f(x) \equiv 1$ et $f(x) \equiv -1$ satisfait l'équation.

Cette solution a été écrite par Ed Doolittle.

3. Soit a, b et c trois nombres réels positifs tels que $a + b + c = 1$. Montrer que

$$\frac{a - bc}{a + bc} + \frac{b - ca}{b + ca} + \frac{c - ab}{c + ab} \leq \frac{3}{2} \ .$$

Solution 1. Noter que

$$1 - \frac{a - bc}{a + bc} = \frac{2bc}{1 - b - c + bc} = \frac{2bc}{(1 - b)(1 - c)} \ .$$

L'inégalité est équivalente à

$$\frac{2bc}{(1 - b)(1 - c)} + \frac{2ca}{(1 - c)(1 - a)} + \frac{2ab}{(1 - a)(1 - b)} \geq \frac{3}{2} \ .$$

Autrement dit

$$4(bc + ca + ab - 3abc) \geq 3(bc + ca + ab + 1 - a - b - c - abc) \ .$$

En simplifiant, on trouve $ab + bc + ca \geq 9abc$ ou

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9 \ .$$

Ceci est une conséquence de l'inégalité des moyennes arithmétiques-géométriques

Solution 2. Remarquer que

$$a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(a + c)$$

et que $a + b = 1 - c$, avec des relations analogues pour d'autres permutations des variables. Alors

$$(b+c)(c+a)(a+b) = (1-a)(1-b)(1-c) = (ab+bc+ca) - abc\ .$$

En écrivant le côté gauche de l'inégalité voulue au dénominateur commun, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{(a-bc)(1-a)+(b-ac)(1-b)+(c-ab)(1-c)}{(b+c)(c+a)(a+b)} &= \frac{(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)-(bc+ca+ab)+3abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}\\ &= \frac{1-(a+b+c)^2+(bc+ca+ab)+3abc}{(ab+bc+ca)-abc}\\ &= \frac{(bc+ca+ab)+3abc}{(bc+bc+ab)-abc}\\ &= 1+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ .\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité des moyennes arithmétiques-géométriques , on obtient

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= (a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)+2abc\\ &\geq 3abc+3abc+2abc = 8abc\ ,\end{aligned}$$

d'où $4abc/[(a+b)(b+c)(c+a)] \leq \frac{1}{2}$. Le résultat voulu s'en suit. On obtient l'égalité lorsque $a=b=c=\frac{1}{3}$.

4. Déterminer toutes les fonctions f définies sur l'ensemble des entiers naturels et qui prennent des valeurs dans l'ensemble des entiers naturels telles que

$$(f(n))^p \equiv n \qquad \mathrm{mod}\ f(p)$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout nombre premier p.

Solution. Si p est un nombre premier, la substitution $n=p$ donne $p \equiv (f(p))^p \equiv 0 \pmod{f(p)}$, alors p est divisible par $f(p)$. Donc, pour tout nombre premier p, $f(p)=1$ ou $f(p)=p$.

Soit $S=\{p : p \text{ est premier et } f(p)=p\}$. Si S est un ensemble infini, alors $f(n)^p \equiv n \pmod p$ pour une infinité des nombres premiers p. Par le petit théorème de Fermat, $n \equiv f(n)^p \equiv f(n)$, d'où $f(n)-n$ est un multiple de p pour une infinité des nombres premiers p. Ceci est possible seulement lorsque $f(n)=n$ pour tout n, et on peut vérifier que c'est en effet une solution.

Si S est vide, alors $f(p)=1$ pour tout nombre premier p, et chaque fonction qui satisfait cette condition est une solution.

Supposons maintenant que S est fini et non vide. Soit q le plus grand nombre premier dans S. Supposons (si possible) que $q \geq 3$. Alors $p \equiv 1 \pmod q$ pour tout nombre premier p plus grand que q. Cependant, ceci n'est pas vari. Soit Q le produit des nombres premiers inéfrieurs ou égals à q. Alors $Q+2$ doit avoir un facteur premier plus grand que q et au moins un d'eux n'est pas congru à 1 (mod q). (Un autre argument note que le postulat de Bertrand peut être utilisé pour produire un nombre premier p entre q et $2q$ qui ne satisfait pas ceci.)

Le seul cas qui reste est $S=\{2\}$. Alors $f(2)=2$ et $f(p)=1$ pour tout nombre premier impair p. Comme $f(n)^2 \equiv n \pmod 2$, $f(n)$ et n doivent avoir la même parité. Par conséquence, toute fonction f qui satisfait $f(n) \equiv n \pmod 2$ pour tout n, $f(2)=2$ et $f(p)=1$ pour tout nombre premier impair p satisfait la condition.

Alors, les seules solutions sont
- $f(n)=n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;
- toute fonction f avec $f(p)=1$ pour tout nombre premier p;
- toute fonction f avec $f(2)=2$, $f(p)=1$ pour les nombres premiers $p>2$ et $f(n)$ et n de même parité.

5. Une *Marche autoévitante d'une tour* sur un échiquier (une grille rectangulaire formée de carrés unitaires) est un chemin tracé par une suite de mouvements parallèles à un bord de l'échiquier partant d'un carré

unitaire à un autre de sorte que chacun de ces mouvements commence où le mouvement précédent a terminé et qu'aucun mouvement ne croise un carré qui a été précédemment croisé, *c'est-à-dire* le chemin de la tour ne se croise pas.

Soit $R(m, n)$ le nombre de Marches autoévitantes d'une tour sur un échiquier $m \times n$ (m lignes, n colonnes) qui commencent au coin inférieur gauche et se terminent au coin supérieur gauche. Par exemple, $R(m, 1) = 1$ pour tout entier naturel m; $R(2, 2) = 2$; $R(3, 2) = 4$; $R(3, 3) = 11$. Trouver une formule pour $R(3, n)$ pour chaque entier naturel n.

Solution 1. Soit $r_n = R(3, n)$. On peut vérifier directement que $r_1 = 1$ et $r_2 = 4$. Dénotons par (i, j) la cellule dans la $i$ème ligne du bas et la $j$ème colonne du gauche, de sorte que les chemins en question passent de $(1, 1)$ à $(3, 1)$.

Supposons que $n \geq 3$. Les marches de la tour tombent en exactement une des six catégories suivantes:

(1) Une marche donnée par $(1, 1) \to (2, 1) \to (3, 1)$.

(2) Les marchent qui évitent la cellule $(2, 1)$: Chacune de ces marches doit commencer avec $(1, 1) \to (1, 2)$ et terminer avec $(3, 2) \to (3, 1)$; Il y a r_{n-1} telles marches.

(3) Les marches qui commencent avec $(1, 1) \to (2, 1) \to (2, 2)$ et qui ne retournent jamais à la première ligne: des telles marches entrent la troisième ligne de $(2, k)$ pour un certain k avec $2 \leq k \leq n$ et vont ensuite le long la troisième ligne vers la gauche à $(3, 1)$; il y a $n - 1$ telles marches.

(4) Les marches qui commencent avec $(1, 1) \to (2, 1) \to \cdots \to (2, k) \to (1, k) \to (1, k + 1)$ et terminent avec $(3, k + 1) \to (3, k) \to (3, k - 1) \to \cdots \to (3, 2) \to (3, 1)$ pour un certain k avec $2 \leq k \leq n - 1$; il y a $r_{n-2} + r_{n-3} + \cdots + r_1$ telles marches.

(5) Les marches qui sont des images d'une réflexion horizontale des marches en (3) qui commencent avec $(1, 1) \to (2, 1)$ et qui n'entrent jamais la troisième ligne jusqu'à la dernière cellule; il y a $n - 1$ telles marches.

(6) Les marches qui sont des images d'une réflexion horizontale des marches en (5); il y a $r_{n-2} + r_{n-3} + \cdots + r_1$ telles marches.

Alors, $r_3 = 1 + r_2 + 2(2 + r_1) = 11$ et, pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} r_n &= 1 + r_{n-1} + 2[(n - 1) + r_{n-2} + r_{n-3} + \cdots + r_1] \\ &= 2n - 1 + r_{n-1} + 2(r_{n-2} + \cdots + r_1) \ , \end{aligned}$$

et

$$r_{n+1} = 2n + 1 + r_n + 2(r_{n-1} + r_{n-2} + \cdots + r_1) \ .$$

D'où

$$r_{n+1} - r_n = 2 + r_n + r_{n-1} \Longrightarrow r_{n+1} = 2 + 2r_n + r_{n-1} \ .$$

Par conséquence

$$r_{n+1} + 1 = 2(r_n + 1) + (r_{n-1} + 1) \ ,$$

alors

$$r_n + 1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})^{n+1} \ ,$$

et

$$r_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})^{n+1} - 1 \ .$$

Solution 2. Utilisons les mêmes notations dans la Solution 1. On a $r_1 = 1$, $r_2 = 4$ et $r_3 = 11$. Soit $n \geq 3$. Considérer la situation où il y a r_{n+1} colonnes. En principe, il y a trois types de Marches de la tour.

Type 1. Il y a quatre marches qui entrent seulement les deux premières colonnes.

Type 2. Il y a $3r_{n-1}$ marches qui ne passent pas entre la deuxième et la troisième colonne dans la ligne du milieu (dans toutes les directions), plus précisément, il y a r_{n-1} de chacun des types suivants:

$$(1,1) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (1,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (3,3) \longrightarrow (3,2) \longrightarrow (3,1)\ ;$$

$$(1,1) \longrightarrow (2,1) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (1,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (3,3) \longrightarrow (3,2) \longrightarrow (3,1)\ ;$$

$$(1,1) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (1,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (3,3) \longrightarrow (3,2) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow (2,1) \longrightarrow (3,1)\ .$$

Type 3. Considérer les marches de la tour qui passent entre la deuxième et la troisième colonne le long de la ligne du milieu. Elles sont du Type 3a:

$$(1,1) \longrightarrow * \longrightarrow (2,2) \longrightarrow (2,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (3,3) \longrightarrow (3,2) \longrightarrow (3,1)\ ,$$

ou du Type 3b:

$$(1,1) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (1,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (2,3) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow * \longrightarrow (3,1)\ ,$$

où dans chacun des cas, l'astérisque représente une des deux options possibles.

On peut associer les marches du Type 3a à des marches de la tour dans les dernières n colonnes, plus précisément

$$(1,2) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow (2,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (3,3) \longrightarrow (3,2)$$

et les marches du Type 3b sont associées à une marche de la tour sur les dernières n colonnes, plus précisément

$$(1,2) \longrightarrow (1,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (2,3) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow (3,2)\ .$$

Le nombre des marches de la tour des derniers deux types ensemble est $r_n - 1 - r_{n-1}$. Du nombre des marches de la tour sur les dernières n colonnes, on soustrait un pour la marche $(1,2) \to (2,2) \to (3,2)$ et r_{n-1} pour les marches du type

$$(1,2) \longrightarrow (1,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (3,3) \longrightarrow (2,3)\ .$$

Alors, le nombre des marches du type 3 est $2(r_n - 1 - r_{n-1}$ et on trouve que

$$r_{n+1} = 4 + 3r_{n-1} + 2(r_n - 1 - r_{n-1}) = 2 + 2r_n + r_{n-1}\ .$$

À partir de ce point, on complète la solution comme dans la Solution 1.

Solution 3. Soit $S(3,n)$ le nombre des marches autoévitantes d'une tour dans lesquelles la tour occuppe la colonne n mais pas la colonne $n+1$. Alors $R(3,n) = |S(3,1)| + |S(3,2)| + \cdots + |S(3,n)|$. De plus, des considérations topologiques nous permettent d'écrire $S(3,n)$ comme l'union de trois sous-ensembles disjoints $S_1(3,n)$, l'ensemble des chemins dans lesquels le coin $(1,n)$ n'est pas occupé, mais il y a un segment de chemin $(2,n) \longrightarrow (3,n)$; $S_2(3,n)$, l'ensemble des chemins dans lesquels les coins $(1,n)$ et $(3,n)$ sont occupés par un chemin $(1,n) \longrightarrow (2,n) \longrightarrow (3,n)$; et $S_3(3,n)$, l'ensemble des chemins dans lesquels le coin $(3,n)$ n'est pas occupé, mais il y a un segment de chemin $(1,n) \longrightarrow (2,n)$. Soit $s_i(n) = |S_i(3,n)|$ pour $i = 1,2,3$. Noter que $s_1(1) = 0$, $s_2(1) = 1$ et $s_3(1) = 0$. Par symétrie, $s_1(n) = s_2(n)$ pour tout entier positif n. De plus, on peut construire des chemins dans $S(3,n+1)$ par "enflement" des chemins dans $S(3,n)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} s_1(n+1) &= s_1(n) + s_2(n)\ ; \\ s_2(n+1) &= s_1(n) + s_2(n) + s_3(n)\ ; \\ s_3(n+1) &= s_2(n) + s_3(n)\ ; \end{aligned}$$

après simplification, on trouve

$$\begin{aligned} s_1(n+1) &= s_1(n) + s_2(n)\ ; \\ s_2(n+1) &= 2s_1(n) + s_2(n)\ . \end{aligned}$$

Ici, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} s_1(n+1) &= s_1(n) + 2s_1(n-1) + s_2(n-1) \\ &= s_1(n) + 2s_1(n-1) + s_1(n) - s_1(n-1) \\ &= 2s_1(n) + s_1(n-1) \ . \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s_2(n+1) &= 2s_1(n) + s_2(n) = 2s_1(n-1) + 2s_2(n-1) + s_2(n) \\ &= s_2(n) - s_2(n-1) + 2s_2(n-1) + s_2(n) \\ &= 2s_2(n) + s_2(n-1) \ . \end{aligned}$$

On trouve que

$$\begin{aligned} s_1(n) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n-1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n-1} \ ; \\ s_2(n) &= \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n-1} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n-1} \ . \end{aligned}$$

En écrivant la somme d'une série géométrique, on trouve que

$$\begin{aligned} R(3,n) &= (s_2(1) + \cdots + s_2(n)) + 2(s_1(1) + \cdots + s_1(n)) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{(1+\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{(1-\sqrt{2})^n - 1}{-\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)[(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}] - 1 \ . \end{aligned}$$

Cette formule est compatible avec $R(3,1) = 1$, $R(3,2) = 4$ et $R(3,3) = 11$.

Reconnaissance. Les deux premières solutions sont dues à Man-Duen Choi.