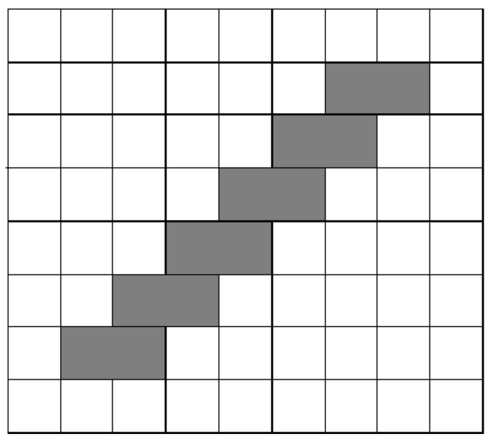
39e Olympiade mathématique du Canada

Le mercredi 28 mars 2007

Solutions aux problèmes 2007 de OMC



Solution à 1. Identifiez cinq sous-ensembles A, B, C, D, E du damier: C comprend les carrés occupés par les six dominos déjà placés, B est le coin supérieur droit, D est le coin inférieur gauche, A comprend les carrés au-dessus et à gauche de ceux dans $B \cup C \cup D$ et E comprend les carrés au-dessous et à droite de ceux dans $B \cup C \cup D$. Le damier peut être coloré de la même façon qu'un damier régulier (noir et blanc) de sorte que A ait 13 carrés noirs et 16 blancs, B ait un seul carré blanc, E ait 16 carrés noirs et 13 blancs et D ait un seul carré noir. Chaque domino autre que les six originaux doit se situer entièrement dans $A \cup B \cup D$ ou dans $E \cup B \cup D$, dont chacun contient au plus 14 dominos. Ainsi, on ne peut pas avoir au total plus que $2 \times 14 + 6 = 34$ dominos. Ceci est possible en plaçant 14 dominos dans $A \cup D$ et 14 dans $E \cup B$.

Solution à 2. Si les triangles sont isocèles, alors ils doivent être congruents et le rapport désiré est 1. En effet, si les deux triangles ont les deux côtés de même longueur en commun, au moins un de ces deux côtés dans un triangle correspond à un côté de même longueur dans l'autre. Si les longueurs communes ne sont pas égales, alors soit que les côtés de même longuer se correspondent ou les côtés de longueurs différentes se correspondent dans les deux directions. Dans ce cas, le rapport est 1 qui est dans les limites voulues.

Supposons maintenant que les triangles sont scalènes. Il est impossible que la même longueur soit extrême (maximum ou minimum) dans les deux triangles. Alors, on doit avoir une situation où les longueurs correspondantes dans les deux triangles sont (x, y, z) et (y, z, u) avec $x < y < z$ et $y < z < u$. On sait que $y/x = z/y = u/z = r > 1$. Alors, $y = rx$ et $z = ry = r^2x$. De l'inégalité triangulaire $z < x + y$, on a que $r^2 < 1 + r$. Comme $r^2 - r - 1 < 0$ et $r > 1$, $1 < r < \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Le rapport des dimensions dans l'ordre croissant est $1/r$ qui satisfait $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) < 1/r < 1$. Le résultat s'en suit.

Solution à 3. (a) Soit $f(x) = x^2 + 4$. Alors

$$\begin{aligned} f(xy) + f(y-x) - f(y+x) &= (x^2y^2 + 4) + (y-x)^2 + 4 - (y+x)^2 - 4 \\ &= (xy)^2 - 4xy + 4 = (xy-2)^2 \geq 0 \ . \end{aligned} \qquad (1)$$

D'où, $f(x) = x^2 + 4$ satisfait la condition.

(b) Considérer un couple (x, y) pour lequel $xy = x + y$. Si on écrit cette équation sous la forme $(x-1)(y-1) = 1$, on trouve la solution générale $(x, y) = (1 + t^{-1}, 1 + t)$, pour $t \neq 0$. En remplaçant ceci dans l'inégalité, on obtient que $f(t - t^{-1}) \geq 0$

pour tout $t \neq 0$. Pour tout nombre réel u, l'équation $t - t^{-1} = u$ mène à l'équation quadratique $t^2 - ut - 1 = 0$ qui admet un discriminant positif et par conséquent une solution réelle. Alors $f(u) \geq 0$ pour tout nombre réel u.

Commentaire. La substitution $v = y - x$, $u = y + x$ dont l'inverse est $x = \frac{1}{2}(u - v)$, $y = \frac{1}{2}(u + v)$ change la condition à $f(\frac{1}{4}(u^2 - v^2)) + f(v) \geq f(u)$. La même stratégie comme dans la solution précédente mène au choix $u = 2 + \sqrt{v^2 + 4}$ et par conséquent, $f(v) \geq 0$ pour tout v.

Solution à 4 (b). Il est facile de vérifier que $a * 1 = 1$ pour $a \neq 1$, ce qui implique que, dès que 1 est inclut dans la liste, il y sera toujours et cette dernière se termine avec la valeur unique 1.

Solution à 4 (a). Il y a plusieurs manières d'aborder la partie (a). Il est important de vérifier que l'ensemble $\{x : 0 < x < 1\}$ est fermé sous l'opération afin que le processus décrit ci-dessus soit toujours défini.

Si $0 < a, b < 1$, alors

$$0 < \frac{a + b - 2ab}{1 - ab} < 1 \ .$$

L'inégalité à gauche suit de

$$a + b - 2ab = a(1 - b) + b(1 - a) > 0$$

et celle à droite suit de

$$1 - \frac{a + b - 2ab}{1 - ab} = \frac{(1 - a)(1 - b)}{1 - ab} > 0 \ .$$

Alors, on n'aura jamais la situation où un ensemble de nombres contiendra une paire de réciproques, et l'opération peut toujours être effectuée.

Solution 1. On peut montrer par induction que deux nombres quelconques dans n'importe quel ensemble s'obtiennent des sous-ensembles disjoints de S.

On utilise un argument par induction sur le nombres d'entrées qu'on commence avec. À chaque étape, le nombre d'entrées est réduit par un. Si on commence par n nombres, le résultat final est

$$\frac{\sigma_1 - 2\sigma_2 + 3\sigma_3 - \cdots + (-1)^{n-1} n\sigma_n}{1 - \sigma_2 + 2\sigma_3 - 3\sigma_4 + \cdots + (-1)^{n-1}(n - 1)\sigma_n} \ ,$$

où σ_i est la somme symétrique de touts les $\binom{n}{i}$ i-produits des n éléments x_i dans la liste.

Solution 2. On définit

$$a * b = \frac{a + b - 2ab}{1 - ab} \ .$$

Cette opération est commutative et associative:

$$a * (b * c) = (a * b) * c = \frac{a + b + c - 2(ab + bc + ca) + 3abc}{1 - (ab + bc + ca) + 2abc} \ .$$

Comme le résultat final est un $*-$produit des éléments de S avec quelques arrangements des parenthèses, le résultat s'en suit.

Solution 3. Soit $\phi(x) = x/(1 - x)$ définie pour $0 < x < 1$. C'est une fonction injective de l'intervalle ouvert $(0, 1)$ à $(0, \infty)$. Pour $a, b \in S$ arbitraires, on a que

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{a + b - 2ab}{1 - ab}\right) &= \tfrac{a+b-2ab}{(1-ab)-(a+b-2ab)} = \tfrac{a+b-2ab}{1-a-b+ab} \\ &= \tfrac{a}{1-a} + \tfrac{b}{1-b} = \phi(a) + \phi(b) \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Posons $T = \{\phi(s) : s \in S\}$ Alors remplacer a, b dans S comme indiqué dans la question revient à remplacer $\phi(a)$ et $\phi(b)$ dans T par $\phi(a) + \phi(b)$ pour obtenir une nouvelle paire d'ensembles liés par ϕ. Le résultat final est alors $\phi^{-1}\left(\sum\{\phi(s) : s \in S\}\right)$.

Solution 4. Soit $f(x) = (1 - x)^{-1}$ définie pour x positif et différent de 1. Alors $f(x) > 1$ si et seulement si $0 < x < 1$. Remaqruer que

$$f(x * y) = \frac{1 - xy}{1 - x - y + xy} = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 - y} - 1 \ .$$

Si $f(x) > 1$ et $f(y) > 1$, alors $f(x * y) > 1$ aussi. Ceci implique que si x et y sont dans l'intervalle $(0, 1)$, il en est de même pour $x * y$. Noter aussi $f(x)$ est une fonction injective.

À chaque liste L, on fait associer la fonction $g(L)$ définie par

$$g(L) = \sum\{f(x) : x \in L\} .$$

Dénotons par L_n la liste donnée et par $L_{n-1}, L_{n-2}, \cdots, L_1$ les listes suivantes, où L_i est la liste avec i éléments. Comme $f(x * y) = f(x) + f(y) - 1$, $g(L_i) = g(L_n) - (n - i)$ indépendamment du choix qui génère chaque liste des listes précédentes. Alors $g(L_1) = g(L_n) - (n - 1)$ est fixe. Par contre, $g(L_1) = f(a)$ pour un certain nombre a avec $0 < a < 1$. D'où $a = f^{-1}(g(L_n) - (n - 1))$ est fixe.

Solution à 5 (a). Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Comme le quadrilatère $AEIF$ a des angles droits aux sommets E et F, il est cyclique et par conséquent, Γ_1 passe par I. De même, Γ_2 et Γ_3 passent par I, ceci montre la partie (a).

Solution à 5 (b). Soient ω et I le cercle inscrit au triangle ABC et son centre respectivement. Remarquer que AI bissecte le segment FE en un angle droit car AI bissecte l'angle FAE et $AF = AE$. De même, BI bissecte le segment DF en un angle droit et CI bissecte le segment DE en un angle droit.

Considérer l'image du diagramme dans l'inversion par rapport à ω. Soit A' l'image de A dans cette inversion, *etc...* Noter que le centre I de l'inversion est situé sur la même droite avec n'importe quel point et son image dans l'inversion. Dans cette inversion, l'image de γ_1 est EF, ce qui fait que A' est le point milieu de EF. De même, B' est le point milieu de DF et C' est le point milieu de DE. Par conséquent, γ', l'image de γ dans cette inversion, est le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$, ce qui implique que γ' est le cercle des neuf points du triangle DEF.

Comme P est l'intersection de Γ et Γ_1 autre que A, alors P' est l'intersection de Γ' et EF autre que A', ce qui signifie que P' est le pieds de la hauteur de D à EF. De même, Q' est le pieds de la hauteur de E à DF et R' est le pieds de la hauteur de F à DE.

Maintenant, soit X, Y et Z les points milieu des arcs BC, AC et AB sur Γ respectivement. On montre par la suite que le point X est sur PD.

Soit X' l'image de X dans l'inversion, alors I, X et X' sont colinéaires. Mais X est le point milieu de l'arc BC, alors A, A', I, X' et X sont colinéaires. L'image de la droite PD est le cercle circonscrit au triangle $P'ID$, alors pour montrer que X est sur PD, il suffit de montrer les points P', I, X' et D sont cocycliques.

On a que B' est le point milieu de DF, C' est celui de DE et P' est le pieds de la hauteur de D à EF. Alors, D est la réflexion de P' dans $B'C'$.

Comme $IA' \perp EF$, $IB' \perp DF$ et $IC' \perp DE$, I est l'hortocentre du triangle $A'B'C'$. Alors, X' est l'intersection de la hauteur de A' à $B'C'$ avec le cercle circonscit au triangle $A'B'C'$. D'après un résultat bien connu, X' est la réflexion de I dans $B'C'$. Ceci implique que $B'C'$ est la bissectrice perpendiculaire de $P'D$ et IX' et par conséquent, les points P', I, X' et D sont cocycliques.

Alors, X est sur PD. De même, Y est sur QE et Z est sur RF. D'où, pour montrer que PD, QE et RF sont concourantes, il suffit de montrer que DX, EY et FZ sont concourantes.

Pour montrer ceci, considérer les tangentes à Γ aux points X, Y et Z. Ces tangentes sont parallèles à BC, AC et AB, respectivement. Alors, le triangle Δ défini par ces tangentes est homothétique au triangle ABC. Soit S le centre de l'homothétie. Alors l'homothétie qui transforme le triangle ABC à Δ transforme ω à Γ, et par conséquent transforme D à X, E à Y et F à Z. D'où DX, EY et FZ se coupent en S.

Commentaire. La solution utilise le résultat suivant: *Supposons que H est l'orthocentre d'un triangle ABC et que AH coupe BC au point P et le cercle circonscrit au triangle ABC au point D. Alors $HP = PD$.* La preuve est facile: soit Q le point d'intersection de BH avec AC. Remarquer que $AD \perp BC$ et $BQ \perp AC$. Comme $\angle ACB = \angle ADB$,

$$\angle HBC = \angle QBC = 90^\circ - \angle QCB = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \angle ADB = \angle DBP ,$$

les deux triangles HBP et DBP sont semblables et $HP = PD$.

Solution 2. (a) Soit J le point d'intersection de Γ_2 et Γ_3. Alors $BDJF$ et $CDJE$ sont cycliques. On a

$$\begin{aligned} \angle FJE &= 360^\circ - (\angle DJF + \angle DJE) \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \angle ABC + 180^\circ - \angle ACB) \\ &= \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle FAE . \end{aligned} \tag{3}$$

D'où $AFJE$ est cyclique et par conséquent, les cercles circonscrits aux triangles AEF, BDF et CED passent par J.

(b) [Y. Li] Joignons RE, RD, RA et RB. Dans Γ_3, $\angle ERD = \angle ECD = \angle ACB$ et $\angle REC = \angle RDC$. Dans Γ, $\angle ARB = \angle ACB$. Alors, $\angle ERD = \angle ARB \Longrightarrow \angle ARE = \angle BRD$. De plus,

$$\angle AER = 180^\circ - \angle REC = 180^\circ - \angle RDC = \angle BDR \, .$$

Alors, les triangles ARE et BRD sont semblables, et $AR : BR = AE : BD = AF : BF$. Ceci implique que RF bissecte l'angle ARB, et par conséquent RF passe par le point milieu de l'arc mineur AB sur Γ. De même, PD et QE sont des bissectrices respectives des angles BPC et CQA et passent par les points milieu des arcs mineurs BC et CA sur γ.

Soit O le centre du cercle Γ, et U, V, W les points milieu respectifs des arcs mineurs BC, CA, AB sur ce cecle de sorte que PU contient D, QV contient E et RW contient F. On doit montrer que DU, EV et FW sont concourantes.

Comme ID et OU sont perpendiculaires à BC, $ID \| OU$. De même, $IE \| OV$ et $IF \| OW$. Comme $|ID| = |IE| = |IF| = r$ (le rayon du cercle inscrit) et $|OU| = |OV| = |OW| = R$ (le rayon du cercle circonscrit), une translation $\overrightarrow{IO}$ suivie par une dilatation d'un facteur de R/r transforment le triangle DEF au triangle UVW, de sorte que ces triangles sont semblables avec des côtés correspondants parallèles.

Soit K le point d'intersection de EV et FW, L celui de DU et FW. Comme les triangles KEF et KVW, LDF et LUW, DEF et UVW sont semblables, on a

$$KF : FW = EF : VW = DF : UW = LF : LW \, ,$$

d'où $K = L$ et les droites DU, EV et FW se coupent en un point commun K, comme voulu.