38e Olympiade mathématique du Canada

Mercredi, 29 mars, 2006

Solutions aux problèmes 2006 de OMC

1. Soit $f(n,k)$ le nombre de façons de distribuer k biscuits à n enfants de sorte que chaque enfant reçoive au plus 2 biscuits. Par exemple, si $n=3$, alors $f(3,7)=0$, $f(3,6)=1$ et $f(3,4)=6$.

Déterminer la valeur de

$$f(2006,1)+f(2006,4)+f(2006,7)+\cdots+f(2006,1000)+f(2006,1003)\ .$$

Commentaire. Malheuresement, il avait une erreur dans l'énoncé de ce problème. Il était prévu que la somme continuait jusqu'à $f(2006,4012)$.

Solution 1. Le nombre de façons de distribuer k biscuits à 2006 enfants est égal au nombre de façons de distribuer 0 biscuit à un enfant particulier et k au reste, plus le nombre de façons de distribuer 1 biscuit à l'enfant particulier et $k-1$ au reste, plus le nombre de façons de distribuer 2 biscuits à l'enfant particulier et $k-2$ au reste. Ainsi, $f(2006,k)=f(2005,k)+f(2005,k-1)+f(2005,k-2)$, d'où la somme demandée est

$$1+\sum_{k=1}^{1003} f(2005,k)\ .$$

Dans l'évaluation de $f(n,k)$, supposons qu'il y a r enfants qui reçoivent 2 biscuits ; ces r enfants peuvent être choisis de $\binom{n}{r}$ façons. Alors il y a $k-2r$ biscuits desquels au plus un est donné pour chacun des $n-r$ enfants. Par conséquent,

$$f(n,k)=\sum_{r=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-2r}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-2r}\ ,$$

avec $\binom{x}{y}=0$ si $x<y$ et si $y<0$. La réponse est

$$\sum_{k=0}^{1003}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{2005}{r}\binom{2005-r}{k-2r}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{2005}{r}\sum_{k=0}^{1003}\binom{2005-r}{k-2r}\ .$$

Solution 2. Le nombre cherché est la somme des coefficients des termes dont les degrés n'excédent pas 1003 dans l'expansion de $(1+x+x^2)^{2005}$, qui est égal au coefficient de x^{1003} dans l'expansion de

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)^{2005}(1+x+\cdots+x^{1003}) &= [(1-x^3)^{2005}(1-x)^{-2005}](1-x^{1004})(1-x)^{-1}\\ &= (1-x^3)^{2005}(1-x)^{-2006}-(1-x^3)^{2005}(1-x)^{-2006}x^{1004}\ .\end{aligned}$$

Comme le degré de chaque terme dans l'expansion du deuxième membre du côté droit excède 1003, on cherche alors le coefficient de x^{1003} dans l'expansion du premier membre:

$$(1-x^3)^{2005}(1-x)^{-2006} = \sum_{i=0}^{2005}(-1)^i\binom{2005}{i}x^{3i}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{-2006}{j}x^j$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{2005}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^i\binom{2005}{i}\binom{2005+j}{j}x^{3i+j} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{2005}(-1)^i\binom{2005}{i}\binom{2005+k-3i}{2005}\right)x^k \ .
\end{aligned}
$$

Le nombre cherché est alors

$$
\sum_{i=1}^{334}(-1)^i\binom{2005}{i}\binom{3008-3i}{2005} = \sum_{i=1}^{334}(-1)^i\frac{(3008-3i)!}{i!(2005-i)!(1003-3i)!} \ .
$$

(Noter que $\binom{3008-3i}{2005} = 0$ lorsque $i \geq 335$.)

2. Soit ABC un triangle acutangle (triangle dont les angles sont aigus). Inscrire un rectangle $DEFG$ dans ce triangle de sorte que D est sur AB, E est sur AC et F et G sont sur BC. Décrire le lieu des points d'intersection des diagonales de tous les rectangles $DEFG$ possibles (c'est-à-dire décrire la courbe occupée par ces points).

Solution. Le lieu cherché est le segment de droite joignant le point milieu M de BC au point milieu K de la hauteur AH. Remarquer qu'un segment de droite DE avec D sur AB et E sur AC détermine un rectangle inscrit; le point milieu F de DE est sur la médiane AM, tandis que le point milieu de la perpendiculaire à BC issue de F est le centre du rectangle. Celui-ci est sur la médiane MK du triangle AMH.

Réciproquement, n'importe quel point P sur MK est le centre d'un triangle ayant une base sur BC et dont la hauteur est égale au double de la distance du point K à BC.

3. Dans un arrangement rectangulaire de nombres réels non négatifs à m lignes et n colonnes, chaque ligne et chaque colonne contient au moins un élément positif. De plus, si l'intersection d'une ligne et d'une colonne est un élément positif, alors la somme de leurs éléments est la même. Démontrer que $m = n$.

Solution 1. Considérons tout d'abord le cas où toutes les lignes possèdent la même somme positive s; ceci comprend la situation particulière où $m = 1$. Alors chaque colonne ayant un élément positif en commun avec une autre ligne doit avoir aussi une somme égale à s. Par conséquent, la somme de toutes les entrées dans la matrice est $ms = ns$, d'où $m = n$.

On montre le cas général par induction sur m. Le cas $m = 1$ étant déjà réglé. Supposons qu'on a un tableau $m \times n$ dont les lignes n'ont pas toutes la même somme. Soit $r < m$ le nombre des lignes qui ont la même somme s, et chacune des autres lignes a une somme différente. Alors chaque colonne partageant une entrée positive avec une de ces lignes doit aussi avoir s comme somme. Supposons qu'il y a c colonnes avec une somme s. La situation est essentiellement inchangée si on permute les lignes et puis les colonnes de sorte que les premières r lignes et les premières c colonnes aient s comme somme. Puisque toutes les entrées qui sont dans les r premières lignes et non pas dans les c premières colonnes et toutes les entrées qui sont dans les c premières colonnes et non pas dans les r premières lignes doivent être 0, on peut partitionner le tableau en une sous-matrice de format $r \times c$ dans lequel toutes les lignes et les colonnes ont la somme s et qui satisfait l'hypothse du problme, deux sous-matrices rectangulaires formés d'entrées nulles dans le coin supérieur droit et le coin inférieur gauche et une sous-matrice de format $(m - r) \times (n - c)$ dans le coin inférieur droit qui satisfait les conditions du problème. Par l'hypothèse d'induction, on voit que $r = c$, d'où $m = n$.

Solution 2. [Y. Zhao] Dénotons par a_{ij} l'entrée de la $i$ème ligne et la $j$ième colonne du tableau, et posons $S = \{(i, j) : a_{ij} > 0\}$. Supposons que r_i est la somme de la $i$ème ligne et que c_j est la somme de la $j$ième colonne. Alors $r_i = c_j$ chaque fois que $(i, j) \in S$. On a alors

$$
\sum\{\frac{a_{ij}}{r_i} : (i,j) \in S\} = \sum\{\frac{a_{ij}}{c_j} : (i,j) \in S\} \ .
$$

On calcule la somme de chaque côté séparément.

$$
\sum\{\frac{a_{ij}}{r_i} : (i,j) \in S\} = \sum\{\frac{a_{ij}}{r_i} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{r_i}\right)r_i = \sum_{i=1}^{m}1 = m \ .
$$

$$
\sum\{\frac{a_{ij}}{c_j} : (i,j) \in S\} = \sum\{\frac{a_{ij}}{c_j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{c_j}\sum_{i=1}^{m}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{c_j}\right)c_j = \sum_{j=1}^{n}1 = n \ .
$$

D'où $m = n$.

Commentaire. La deuxième solution peut être rendue plus claire et plus élégante en définissant $u_{ij} = a_{ij}/r_i$ pour tout (i, j). Si $a_{ij} = 0$, alors $u_{ij} = 0$. Si $a_{ij} > 0$, alors, par hypothèse, $u_{ij} = a_{ij}/c_j$, une relation qui est satisfaite pour tout (i, j). On trouve que

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} u_{ij} = 1$$

pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, de sorte que (u_{ij}) est un tableau de format $m \times n$ dont la somme sur chaque ligne et chaque colonne est égale à 1. Ainsi

$$m = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} u_{ij} \right) = \sum \{u_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} u_{ij} \right) = n$$

(étant la somme de toutes les entrées du tableau).

4. Considérer un tournoi composé de $2n + 1$ équipes. Chaque équipe rencontre les autres équipes exactement une fois. On dit que trois équipes X, Y et Z forment un *triplet cyclique* si X défait Y, Y défait Z, et Z défait X. Il y a aucune égalité.

(a) Déterminer le nombre minimum de triplets cycliques possibles.

(b) Déterminer le nombre maximum de triplets cycliques possibles.

Solution 1. (a) Le minimum est 0, ce qui est réalisé par un tournoi dans lequel l'équipe T_i défait l'équipe T_j si et seulement si $i > j$.

(b) N'importe quel ensemble de trois équipes constitue soit un triplet cyclique soit un "triplet dominé" dans lequel un équipe défait les deux autres; dénotons par c le nombre des triplets cycliques et par d celui des triplets dominés. Alors $c+d = \binom{2n+1}{3}$. Supposons que l'équipe T_i défait x_i autres équipes; alors il est l'équipe gagnant dans exactement $\binom{x_i}{2}$ triplets dominés. Remarquer que $\sum_{i=1}^{2n+1} x_i = \binom{2n+1}{2}$, le nombre total des jeux. Alors

$$d = \sum_{i=1}^{2n+1} \binom{x_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n+1} x_i^2 - \frac{1}{2} \binom{2n+1}{2} .$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $(2n + 1) \sum_{i=1}^{2n+1} x_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{2n+1} x_i)^2 = n^2(2n + 1)^2$, d'où

$$c = \binom{2n+1}{3} - \sum_{i=1}^{2n+1} \binom{x_i}{2} \leq \binom{2n+1}{3} - \frac{n^2(2n+1)}{2} + \frac{1}{2}\binom{2n+1}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Pour trouver la borne supérieure, supposons que les équipes sont $T_1 = T_{2n+2}$, $T_2 = T_{2n+3}$, $\cdots$, $T_i = T_{2n+1+i}$, $\cdots$, $T_{2n+1} = T_{4n+2}$. Pour chaque i, supposons que l'équipe T_i défait $T_{i+1}, T_{i+2}, \cdots, T_{i+n}$ et perd à $T_{i+n+1}, \cdots, T_{i+2n}$. On doit vérifier que c'est une attribution cohérente des victoires et des pertes, puisque le résultat pour chaque paire d'équipes est défini deux fois. On peut voir ceci en remarquant que $(2n + 1 + i) - (i + j) = 2n + 1 - j \geq n + 1$ for $1 \leq j \leq n$. Les triplets cycliques sont: $(T_i, T_{i+j}, T_{i+j+k})$ où $1 \leq j \leq n$ et $(2n + 1 + i) - (i + j + k) \leq n$, *i.e.*, lorsque $1 \leq j \leq n$ et $n + 1 - j \leq k \leq n$. Pour tout i, ceci donne $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ triplets cycliques. Lorsqu'on couvre toutes les valeurs de i, chaque triplet cyclique est compté trois fois, d'où le nombre de triplets cycliques est

$$\frac{2n+1}{3} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Solution 2. [S. Eastwood] (b) Soit t le nombre de triplets cycliques et u celui de triplets ordonnés d'équipes (X, Y, Z) où X défait Y et Y défait Z. Chaque triplet cyclique produit trois triplets ordonnés tandis que les autres triplets en produisent exactement un. Le nombre total de triplets est

$$\binom{2n+1}{3} = \frac{n(4n^2 - 1)}{3} .$$

Le nombre de triplets non-cycliques est

$$\frac{n(4n^2-1)}{3} - t \ .$$

Alors

$$u = 3t + \left(\frac{n(4n^2-1)}{3} - t\right) \Longrightarrow$$

$$t = \frac{3u - n(4n^2-1)}{6} = \frac{u-(2n+1)n^2}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .$$

Si l'équipe Y défait a équipes et perd contre b autres, alors le nombre de triplets ordonnés ayant Y comme composante centrale est ab. Comme $a+b=2n$, on a $ab \le n2$ par l'inégalité des moyennes arithmético-géométriques. D'où $u \le (2n+1)n2$ et par conséquent

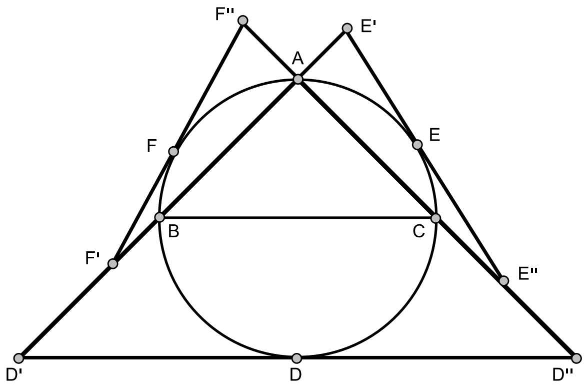
$$t \le \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .$$

Le maximum est atteint quand $u = (2n+1)n2$, ce qui peut se produire lorsqu'on arrange touts les équipes en cercle avec chaque équipe défiant exactement les n équipes dans le sens horaire.

Commentaire. Le fait que le maximum est $\sum_{i=1}^{n} i^2$ est assez intéressant; exsite-t-il un argument clair qui donne la réponse sous cette forme?

5. Les sommets d'un triangle rectangle ABC inscrit dans un cercle divisent la circonférence du cercle en trois arcs. L'angle droit du triangle est en A, alors l'arc opposé BC est un demi-cercle tandis que les arcs AB et AC sont supplémentaires. Pour chaque arc, on trace une tangente de sorte que son point de tangence est le point milieu du segment de droite défini par les intersections de la tangente avec l'extension des segments de droite AB et AC. Plus précisement, le point D sur l'arc BC est le point-milieu du segment de droite $D'D''$ où D' et D'' sont les intersections de la tangente à D avec les droites AB et AC, respectivement. Pareillement pour le point E sur l'arc AC et pour F sur l'arc AB.

Démontrer que le triangle DEF est équilatérale.



Solution 1. Un prime indique le point d'intersection d'une tangente avec AB et un double prime indique le point où cette tangente rencontre AC. On sait que $DD' = DD''$, $EE' = EE''$ et $FF' = FF''$. On doit montrer que l'arc EF est le tier de la circonférence ainsi que l'arc DBF.

AF est la médiane à l'hypothèse du triangle rectangle $AF'F''$, de sorte que $FF' = FA$ et alors

$$\text{arc } AF = 2\angle F''FA = 2(\angle FF'A + \angle FAF') = 4\angle FAF' = 4\angle FAB = 2 \text{ arc } BF \ ,$$

ainsi arc $FA = (2/3)$ arc BFA. De même, arc $AE = (2/3)$ arc AEC. Par conséquent, arc FE est 2/3 du demi-cercle, ou 1/3 de la circonférence comme demandé.

Tant qu'à l'arc DBF, arc $BD = 2\angle BAD = \angle BAD + \angle BD'D = \angle ADD'' = (1/2)$ arc ACD. Mais, arc $BF = (1/2)$ arc AF, donc arc $DBF = (1/2)$ arc $FAED$. Alors, arc DBF est 1/3 de la circonférence et la preuve est complète.

Solution 2. Comme $AE'E''$ est un triangle rectangle, $AE = EE' = EE''$ d'où $\angle CAE = \angle CE''E$. De plus, $AD = D'D = DD''$, donc $\angle CDD'' = \angle CAD = \angle CD''D$. Comme $EADC$ est un quadrilatère cyclique,

$$\begin{aligned}
180^\circ &= \angle EAD + \angle ECD \\
&= \angle DAC + \angle CAE + \angle ECA + \angle ACD \\
&= \angle DAC + \angle CAE + \angle CEE'' + \angle CE''E + \angle CDD'' + \angle CD''D \\
&= \angle DAC + \angle CAE + \angle CAE + \angle CAE + \angle CAD + \angle CAD \\
&= 3(\angle DAC + \angle DAE) = 3(\angle DAE)
\end{aligned}$$

Alors $\angle DFE = \angle DAE = 60^\circ$. De même, $\angle DEF = 60^\circ$. Ceci implique que le triangle DEF is équilatérale.