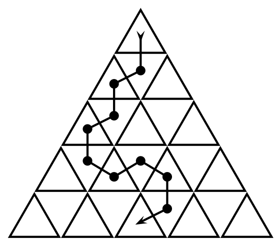
Solution de l'Olympiade Mathématique du Canada 2005

1. Soit un triangle équilatéral dont le côté est de longueur n, divisé en triangles unitaires tel qu'illustré. Soit $f(n)$ le nombre de chemins allant du triangle de la rangée du haut jusqu'au triangle au centre de la rangée du bas, de façon à ce que des triangles adjacents partagent une arête commune et que le chemin ne repasse jamais par le même triangle et qu'il n'aille jamais vers le haut (d'une rangée inférieure à une rangée supérieure). Un tel chemin est illustré ci-après avec $n = 5$. Déterminer la valeur de $f(2005)$.



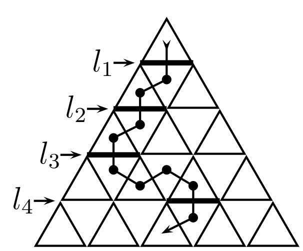
Solution

Nous allons montrer que $f(n) = (n-1)!$.

Étiqueter selon l_1, l_2, ... les segments horizontaux du triangle, tel quillustré ci-bas.

Puisque le chemin allant du triangle de la rangée du haut jusqu'à la rangée du bas ne se déplace jamais vers le haut, ce chemin doit traverser chacune de $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$ exactement une seule fois. Les lignes diagonales du triangle divisent l_k en k segments unitaires, et le chemin doit traverser exactement un de ces k segments, ceci pour chaque k. (Au schéma qui suit, on a indiqué en gras ces segments sélectionnés.) Le chemin est entièrement défini par cet ensemble de $n-1$ segments où le chemin va du haut vers le bas. Allant de la rangée k à la rangée $k+1$, il y a k segments possibles où le chemin va traverser l_k. Ainsi, il y a $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)!$ façons de traverser les $n-1$ lignes horizontales, chacune d'entre elles correspondant à un chemin unique, d'où $f(n) = (n-1)!$.

Ainsi $f(2005) = (2004)!$.



2. Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien, *i.e.* un triplet d'entiers positifs tels que $a^2+b^2=c^2$.

   a) Démontrer que $(c/a+c/b)^2>8$.

   b) Démontrer qu'il n'existe aucun entier n pour lequel il existe un triplet pythagoricien (a, b, c) satisfaisant $(c/a+c/b)^2=n$.

a) **Solution 1**

Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien. Envisager a et b comme longueurs d'un triangle rectangle dont l'hypotenuse est c; soit θ l'angle déterminé par les cotés de longueurs a et c. Alors

$$\begin{aligned}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\right)^2=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta\cos\theta)^2}\\ &= 4\left(\frac{1+\sin 2\theta}{\sin^2 2\theta}\right)=\frac{4}{\sin^2 2\theta}+\frac{4}{\sin 2\theta}\end{aligned}$$

Puisque $0<\theta<90^\circ$, on a $0<\sin 2\theta\leq 1$, avec égalité si et seulement si $\theta=45^\circ$. Mais alors $a=b$, puis $\sqrt{2}=c/a$, contredisant le fait que a et c sont tous deux entiers. Ainsi, $0<\sin 2\theta<1$, d'où $(c/a+c/b)^2>8$.

Solution 2

Définissant θ comme dans la solution 1, nous avons $c/a+c/b=\sec\theta+\csc\theta$. Par l'inégalité arithmético-géométrique, nous avons alors $(\sec\theta+\csc\theta)/2\geq\sqrt{\sec\theta\csc\theta}$. Ainsi

$$c/a+c/b\geq\frac{2}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\theta}}\geq 2\sqrt{2}.$$

Puisque a, b et c sont entiers, nous avons $c/a+c/b>2\sqrt{2}$, donnant $(c/a+c/b)^2>8$.

Solution 3

Par simplification et l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2=c^2\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2=\frac{(a^2+b^2)(a+b)^2}{a^2b^2}\geq\frac{2\sqrt{a^2b^2}\,(2\sqrt{ab})^2}{a^2b^2}=8,$$

avec égalité si et seulement si $a=b$. Par le même argument que dans la Solution 1, a ne peut pas égaler b, d'où l'inégalité est stricte.

Solution 4

$$\begin{aligned}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2 &= \frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{2c^2}{ab}=1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+1+\frac{2(a^2+b^2)}{ab}\\ &= 2+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2+2+\frac{2}{ab}\Big((a-b)^2+2ab\Big)\\ &= 4+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2+\frac{2(a-b)^2}{ab}+4\geq 8,\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $a=b$, qui ne peut pas avoir lieu, comme vu ci-haut.

b) **Solution 1**

Puisque $c/a + c/b$ est rationnel, $(c/a + c/b)^2$ ne peut être entier que si $c/a + c/b$ est entier. Supposons que $c/a + c/b = m$ entier. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. (Autrement, on peut enlever le facteur commun de (a, b, c), laissant m inchangé.)

Puisque $c(a+b) = mab$ et que $\text{pgcd}(a, a+b) = 1$, a doit diviser c, donnant $c = ak$. Ainsi $a^2 + b^2 = a^2k^2$, d'où $b^2 = (k^2 - 1)a^2$. D'où a divise b contredisant le fait que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Il en découle que $(c/a + c/b)^2$ ne peut pas être entier.

Solution 2

On commence comme dans la Solution 1, supposant que $c/a + c/b = m$ entier, où $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Ainsi a et b ne peuvent pas être tous deux pairs. Aussi, a et b ne peuvent pas tous deux être impairs, car alors on aurait $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 4$, impossible puisque les carrés parfaits sont congrus à 0 ou 1 modulo 4. Ainsi, l'un de a et b est pair, l'autre est impair, et c est impair.

Or $c/a + c/b = m$ implique $c(a + b) = mab$, qui ne peut pas être vrai car $c(a + b)$ est impair et mab est pair.

3. Soit S un ensemble de $n \geq 3$ points l'intérieur d'un cercle.

   a) Démontrer qu'il existe trois points distincts $a, b, c \in S$ et trois points distincts A, B, C sur le cercle, tels que a est (strictement) plus près de A que tout autre point dans S, que b est (strictement) plus près de B que tout autre point dans S et que c est (strictement) plus près de C que tout autre point dans S.

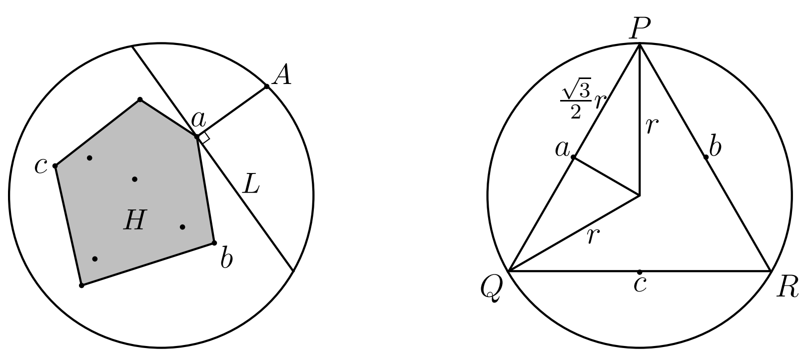
   b) Montrer que pour aucune valeur de n on ne peut garantir l'existence de quatre tels points (et les points correspondants sur le cercle).

Solution 1

a) Soit H le plus petit ensemble convexe de points dans le plan, contenant S.† Prenons 3 points $a, b, c \in S$ sur la frontière de S. (Il doit toujours y avoir au moins 3, mais pas nécessairement 4, tels points.)

Puisque a est sur la frontière de l'ensemble convexe H, on peut construire une corde L telle qu'aucun couple de points de H se trouve sur des côtés opposés de L. Des deux points où la perpendiculaire à L au point a rencontre le cercle, choisir celui sur le côté de L n'incluant aucun point de H et nommer ce point A. Il est évident que A est plus près de a que de tout autre point de L ou de l'autre côté de L. Ainsi, A est plus près de a que de tout autre point de S. Les points B et C sont obtenus de façon analogue, d'où la preuve est complétée.

[Noter que cet argument tient toujours si les points de S se trouvent sur une ligne.]



(a) (b)

b) Soit PQR un triangle équilatéral inscrit dans le cercle et soient a, b et c les mi-points des trois côtés de $\triangle PQR$. Si r est le rayon du cercle, tout point sur le cercle se trouve à une distance au plus $(\sqrt{3}/2)r$ de l'un de a, b, c. (Voir la figure (b) ci-haut.)

Or, $\sqrt{3}/2 < 9/10$. Si S consistait de a, b et c, puis un nuage de points à distance inférieure à $r/10$ du centre du cercle, il serait impossible de choisir 4 points de S et les points correspondants sur le cercle, donnant la propriété désirée.

---

†En passant, H est dit enveloppe convexe de S. Si les points de S se situent sur une droite, alors H est le segment le plus court contenant les points de S. Autrement, H est un polygone dont les sommets sont éléments de S, tous les autres points de S étant à l'intérieur ou sur la frontière de ce polygone.

Solution 2

a) Si tous les points de S se trouvent sur une ligne L, choisir n'importe quels 3 d'entre eux et les nommer a, b et c. Soit A un point sur le cercle, rencontrant la perpendiculaire vers L au point a. Visiblement, A est plus près de a que de tout autre point sur L, donc A est plus près de a que de tout autre point de S. On définit B et C similairement.

   Autrement, choisir a, b et c dans S de façon à ce que le triangle formé par ces points ait une surface maximale. Construire l'altitude du côté bc vers le sommet a et prolonger cette ligne pour qu'elle intersecte le cercle en A. Nous affirmons que A est plus près de a que de tout autre point de S.

   Supposons que non. Soit alors x un point de S dont la distance à A est inférieure à la distance de A à a. Alors la distance perpendiculaire de x à la ligne bc est supérieure à la distance perpendiculaire de a à la ligne bc. Mais alors le triangle formé par les points x, b et c a une surface supérieure à celle du triangle formé par les points a, b et c, contredisant le choix original de ces 3 points. Ainsi A est plus près de a que de tout autre point de S.

   Les points B et C sont construits à l'aide des altitudes passant par b et c, respectivement.

b) Voir la Solution 1.

4. Soit ABC un triangle de rayon circonscrit R, de périmètre P et de surface K. Déterminer la valeur maximale de KP/R^3.

Solution 1

Puisque KP/R^3 est le même pour deux triangles similaires, on peut fixer $R = 1$, puis maximiser KP par rapport aux triangles inscrits dans le cercle unitaire. Fixons A et B sur le cercle unitaire. Le lieu des points C donnant un triangle de périmètre P est une ellipse qui rencontre le cercle en au plus 4 points. La surface K est maximisée, pour P fixe, lorsque C est choisi sur la bissectrice perpendiculaire de AB, d'où la valeur maximale de KP est atteinte en prenant C le point où cette bissectrice perpendiculaire rencontre le cercle. D'où la valeur maximale de KP est atteinte, pour AB fixe, lorsque le triangle ABC est isocèle. Répétant le raisonnement avec BC fixe, on obtient que le maximum est atteint lorsque ABC est un triangle équilatéral.

Considérons donc un triangle équilatéral de côté a. Il vérifie $P = 3a$. La hauteur est $a\sqrt{3}/2$, donnant $K = a^2\sqrt{3}/4$. De la loi du sinus, prolongée, on obtient $2R = a/\sin(60)$ d'où $R = a/\sqrt{3}$. Ainsi, la valeur maximale recherchée est

$$KP/R^3 = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)(3a)\left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right)^3 = \frac{27}{4}.$$

Solution 2

De la loi du sinus, prolongée, les côtés du triangle sont $2R\sin A$, $2R\sin B$ et $2R\sin C$. Ainsi

$$P = 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \text{ et } K = \frac{1}{2}(2R\sin A)(2R\sin B)(\sin C),$$

d'où

$$\frac{KP}{R^3} = 4\sin A\sin B\sin C(\sin A + \sin B + \sin C).$$

Nous voulons déterminer la valeur maximale de cette expression pour $A+B+C = 180°$. Or, à l'aide d'identités bien connues pour les sommes et produits de fonctions sinus, nous pouvons maintenant écrire

$$\frac{KP}{R^3} = 4\sin A\left(\frac{\cos(B-C)}{2} - \frac{\cos(B+C)}{2}\right)\left(\sin A + 2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right).$$

Si on considère les termes en A comme fixes, alors $B+C$ est fixe aussi et cette expression prend sa valeur maximale lorsque $\cos(B-C)$ et $\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$ sont égaux, c'est-à-dire lorsque $B = C$. De façon similaire, on peut montrer que pour une valeur fixe de B, KP/R^3 est maximisée lorsque $A = C$. Ainsi, le maximum de KP/R^3 a lieu lorsque $A = B = C = 60°$. Il est maintenant aisé de substituer dans l'expression ci-haut et obtenir la valeur maximale de $27/4$.

Solution 3

Comme dans la Solution 2, nous obtenons

$$\frac{KP}{R^3} = 4\sin A \sin B \sin C(\sin A + \sin B + \sin C).$$

Or, de l'inégalité arithmético-géométrique, nous avons

$$\sin A \sin B \sin C \leq \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3,$$

donnant

$$\frac{KP}{R^3} \leq \frac{4}{27}(\sin A + \sin B + \sin C)^4,$$

avec éqalité lorsque $\sin A = \sin B = \sin C$. Puisque la fonction sinus est concave sur l'intervalle de 0 to π, l'inégalité de Jensen donne

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Puisque l'égalité n'a lieu que lorsque $\sin A = \sin B = \sin C$, nous concluons que la valeur maximale de KP/R^3 est $\frac{4}{27}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 27/4$.

5. Un triplet ordonné d'entiers positifs (a,b,c) est dit *n-puissant* si $a \leq b \leq c$, $\text{pgcd}(a,b,c) = 1$, et $a^n + b^n + c^n$ est divisible par $a+b+c$. Par exemple, $(1,2,2)$ est 5-puissant.

   a) Déterminer tous les triplets ordonnés (s'il y en a) qui sont n-puissants pour tout $n \geq 1$.

   b) Déterminer tous les triplets ordonnés (s'il y en a) qui sont 2004-puissants et 2005-puissants mais pas 2007-puissants.

   [Noter que $\text{pgcd}(a,b,c)$ est le plus grand commun diviseur de a, b et c.]

Solution 1

Soit $T_n = a^n + b^n + c^n$ et considérons le polynôme

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc.$$

Puisque $P(a) = 0$, on obtient $a^3 = (a+b+c)a^2 - (ab+ac+bc)a + abc$, d'où, par multiplication par a^{n-3}, on obtient $a^n = (a+b+c)a^{n-1} - (ab+ac+bc)a^{n-2} + (abc)a^{n-3}$. Par le même raisonnement, on obtient des expressions similaires pour b^n et c^n. Additionnant les trois égalités, il en suit que T_n satisfait la récurrence:

$$T_n = (a+b+c)T_{n-1} - (ab+ac+bc)T_{n-2} + (abc)T_{n-3}, \text{ pour } n \geq 3.$$

De ceci, il découle que si T_{n-2} et T_{n-3} sont divisibles par $a+b+c$, il en sera de même pour T_n. Ceci répond immédiatement à la partie (b), dans le sens qu'il n'existe aucun triplet ordonné qui soit 2004-puissant et 2005-puissant mais pas 2007-puissant. De plus, cette propriété réduit le nombre de cas à considérer en partie (a), car, tout triplet étant 1-puissant, tout triplet 2-puissant et 3-puissant sera n-puissant pour tout $n \geq 1$.

Posant $n = 3$ dans la récurrence ci-haut,

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - (ab+ac+bc)(a+b+c) + 3abc,$$

qui implique que (a,b,c) est 3-puissant si et seulement si $3abc$ est divisible par $a+b+c$. Aussi

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc),$$

d'où (a,b,c) est 2-puissant si et seulement si $2(ab+ac+bc)$ est divisible par $a+b+c$.

Supposons donc qu'un nombre premier $p \geq 5$ divise $a+b+c$. Alors p divise $3abc$ donc abc. Puisque $\text{pgcd}(a,b,c) = 1$, il suit que p divise exactement un de a, b, c. Mais alors p ne divise pas $2(ab+ac+bc)$.

Supposons que 3^2 divise $a+b+c$. Alors 3 divise abc, d'où 3 divise exactement un de a, b, c. Mais alors 3 ne divise pas $2(ab+ac+bc)$.

Supposons que 2^2 divides $a+b+c$. Alors 4 divise abc. Puisque $\text{pgcd}(a,b,c) = 1$, il suit qu'au plus un de a, b, c est pair, impliquant qu'un seul de a, b, c est divisible par 4 et que les deux autres sont impairs. Mais alors $ab+ac+bc$ est impair, ce qui empêche 4 de diviser $2(ab+ac+bc)$.

Ainsi, si (a,b,c) est 2- et 3-puissant, alors $a+b+c$ est divisible ni par 4 ni par 9 ni par un nombre premier supérieur à 3. Puisque $a+b+c$ est au moins égal à 3, il en résulte que $a+b+c$ est soit 3 soit 6. C'est maintenant simple de faire une étude de cas, pour conclure que les seuls triplets n-puissants pour tout $n \geq 1$ sont $(1,1,1)$ et $(1,1,4)$.

Solution 2

Soit p un nombre premier. Par le petit théorème de Fermat,

$$a^{p-1} \equiv \begin{cases} 1 \pmod{p}, & \text{si } p \text{ ne divise pas } a; \\ 0 \pmod{p}, & \text{si } p \text{ divise } a. \end{cases}$$

Puisque $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$, nous avons donc $a^{p-1} + b^{p-1} + c^{p-1} \equiv 1, 2$ ou $3 \pmod{p}$. Ainsi, puisque p est un diviseur premier de $a^{p-1} + b^{p-1} + c^{p-1}$, p doit être égal à 2 ou 3. D'où, si (a, b, c) est n-puissant pour tout $n \geq 1$, les seuls diviseurs premiers possibles de $a + b + c$ sont 2 et 3.

De façon similaire, $a + b + c$ est divisible par ni 4 ni 9.

Puisque

$$a^2 \equiv \begin{cases} 0 \pmod{4}, & \text{si } p \text{ est pair;} \\ 1 \pmod{4}, & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

et que a, b, c ne sont pas tous pairs, nous avons $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1, 2$ ou $3 \pmod{4}$.

Par expansion de $(3k)^3$, $(3k + 1)^3$ et $(3k + 2)^3$, nous obtenons que a^3 est congrue à 0, 1 ou -1 modulo 9. Ainsi

$$a^6 \equiv \begin{cases} 0 \pmod{9}, & \text{si } 3 \text{ divise } a; \\ 1 \pmod{9}, & \text{si } 3 \text{ ne divise pas } a. \end{cases}$$

Puisque a, b, c ne sont pas tous divisibles par 3, nous avons donc que $a^6 + b^6 + c^6 \equiv 1, 2$ ou $3 \pmod{9}$.

Ainsi, $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas divisible par 4 et $a^6 + b^6 + c^6$ n'est pas divisible par 9.

D'où, si (a, b, c) est n-puissant pour tout $n \geq 1$, alors $a + b + c$ est divisible par ni 4 ni 9. D'où $a + b + c$ est soit 3 soit 6.

Vérifiant toutes les possibilités, nous concluons que les seuls triplets n-puissants pour tout $n \geq 1$ sont $(1, 1, 1)$ et $(1, 1, 4)$.

Voir la Solution 1 pour la partie (b).