# Solution Olympiade 2003

1. Considerons une horloge ordinaire (12 heures) comportant une aiguille des heures et une aiguille des minutes qui se déplacent de façon continue. Soit $m$ un entier tel que $1 \le m \le 720$. A précisément $m$ minutes après 12h00, l'angle entre les deux aiguilles est exactement $1^\circ$. Déterminer toutes les valeurs possibles de $m$.

   **Solution**

   L'aiguille des minutes fait une révolution de $360^\circ$ à toutes les 60 minutes, donc après $m$ minutes elle aura balayé $\frac{360}{60}m = 6m$ degrés. L'aiguille des heures fait une révolution entière à toutes les 12 heures (720 minutes), donc après $m$ minutes elle aura balayé $\frac{360}{720}m = m/2$ degrés. Puisque les deux aiguilles ont commencé à la même position à 12h00, l'angle entre les deux aiguilles sera de $1^\circ$ lorsque $6m - m/2 = \pm 1 + 360k$ pour un certain entier $k$. Résolvant cette équation, on obtient

   $$m = \frac{720k \pm 2}{11} = 65k + \frac{5k \pm 2}{11}.$$

   Puisque $1 \le m \le 720$, nous avons $1 \le k \le 11$. Or $m$ et $k$ sont entiers, d'où $5k \pm 2$ est divisible par 11, donnant $5k \pm 2 = 11q$. Alors

   $$5k = 11q \pm 2 \quad \Rightarrow \quad k = 2q + \frac{q \pm 2}{5}.$$

   Il est clair que seulement $q = 2$ et $q = 3$ satisfont ces conditions, d'où $k = 4$ ou $k = 7$. Substituant ces valeurs dans l'expression pour $m$, on détermine que les seules valeurs possibles pour $m$ sont 262 et 458.

2. Trouver les trois derniers chiffres de $2003^{2002^{2001}}$.

**Solution**

Il faut déterminer le reste lorsque $2003^{2002^{2001}}$ est divisé par 1000, qui est le même que le reste lorsque $3^{2002^{2001}}$ est divisé par 1000, puisque $2003 \equiv 3 \pmod{1000}$. Pour ce faire, nous allons premièrement déterminer un entier positif $n$ tel que $3^n \equiv 1 \pmod{1000}$ et ensuite nous allons exprimer $2002^{2001}$ sous la forme $nk + r$, de manière à ce que

$$2003^{2002^{2001}} \equiv 3^{nk+r} \equiv (3^n)^k \cdot 3^r \equiv 1^k \cdot 3^r \equiv 3^r \pmod{1000}.$$

Puisque $3^2 = 10 - 1$, nous pouvons évaluer $3^{2m}$ à l'aide du binôme de Newton:

$$3^{2m} = (10-1)^m = (-1)^m + 10m(-1)^{m-1} + 100\frac{m(m-1)}{2}(-1)^{m-2} + \cdots + 10^m.$$

Après les 3 premiers termes de cette somme, tous les termes sont divisibles par 1000. Posant $m = 2q$, nous avons

$$3^{4q} \equiv 1 - 20q + 100q(2q-1) \pmod{1000}. \tag{1}$$

Utilisant ceci, on voit que $3^{100} \equiv 1 \pmod{1000}$.

Nous voulons maintenant déterminer le reste lorsque $2002^{2001}$ est divisé par 100.

Or $2002^{2001} \equiv 2^{2001} \pmod{100} \equiv 4 \cdot 2^{1999} \pmod{4 \cdot 25}$, donc on va étudier les puissances de 2 modulo 25. Notant que $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$, nous avons

$$2^{1999} = (2^{10})^{199} \cdot 2^9 \equiv (-1)^{199} \cdot 512 \equiv -12 \equiv 13 \pmod{25}.$$

D'où $2^{2001} \equiv 4 \cdot 13 = 52 \pmod{100}$. Ainsi $2002^{2001}$ s'écrit sous la forme $100k + 52$ pour un certain entier $k$, donnant

$$2003^{2002^{2001}} \equiv 3^{52} \pmod{1000} \equiv 1 - 20 \cdot 13 + 1300 \cdot 25 \equiv 241 \pmod{1000}$$

à l'aide de (1). Ainsi, les 3 derniers chiffres de $2003^{2002^{2001}}$ sont 241.

3. Trouver toutes les solutions réelles positive (s'il y en a) à

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z, \text{ et}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz.$$

**Solution 1**

Soit $f(x, y, z) = (x^3 - x) + (y^3 - y) + (z^3 - z)$. La première équation ci-haut est équivalente à $f(x, y, z) = 0$. Si $x, y, z \geq 1$ alors $f(x, y, z) \geq 0 = 0$ avec égalité seulement si $x = y = z = 1$. Or, si $x = y = z = 1$, la deuxième équation n'est pas satisfaite. D'où dans toute solution au système d'équations, au moins une des variables est inférieure à 1. Sans perte de généralité, supposons que $x < 1$. Alors

$$x^2 + y^2 + z^2 > y^2 + z^2 \geq 2yz > yz > xyz.$$

D'où le système n'a aucune solution réelle positive.

**Solution 2**

On va montrer que le système n'a aucune solution réelle positive. Supposons autrement. La deuxième équation peut être réécrite comme $x^2 - (yz)x + (y^2 + z^2)$. Puisque cette quadratique possède une solution réelle par hypothèse, son discriminant est non négatif. D'où

$$y^2z^2 - 4y^2 - 4z^2 \geq 0.$$

Une division par $4y^2z^2$ donne

$$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{y^2}.$$

Ainsi $y^2 \geq 4$ et donc $y = 2$, $y$ étant positive. Un raisonnement similaire donne $x, y, z \geq 2$. Mais la première équation peut être écrite comme

$$x(x^2 - 1) + y(y^2 - 1) + z(z^2 - 1) = 0,$$

contredisant $x, y, z \geq 2$. Ainsi, aucune solution réelle positive existe.

**Solution 3**

Appliquant les inégalités arithmético-géométrique et de puissances moyennes à $x, y, z$, nous avons

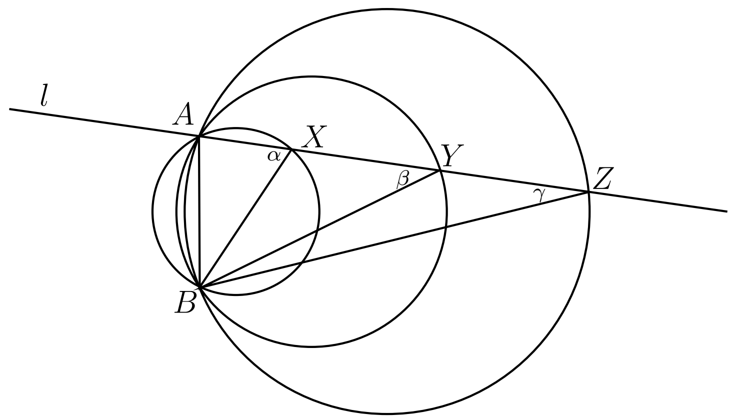
$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{x^3+y^3+z^3}{3}}.$$

Posant $S = x+y+z = x^3+y^3+z^3$ et $P = xyz = x^2+y^2+z^2$, ces inégalités peuvent être écrites comme

$$\sqrt[3]{P} \leq \frac{S}{3} \leq \sqrt{\frac{P}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{S}{3}}.$$

Or $\sqrt[3]{P} \leq \sqrt{\frac{P}{3}}$ implique que $P^2 \leq P^3/27$, et donc que $P \geq 27$. Aussi $\frac{S}{3} \leq \sqrt[3]{\frac{S}{3}}$ implique que $S^3/27 \leq S/3$, d'où $S \leq 3$. Mais $\sqrt[3]{P} \geq 3$ et $\sqrt[3]{\frac{S}{3}} \leq 1$ sont incompatibles avec $\sqrt[3]{P} \leq \sqrt[3]{\frac{S}{3}}$. Ainsi, le système ne peut pas avoir de solution réelle positive.

4. Démontrer que, lorsque trois cercles partagent une même corde $AB$, toute droite passant par $A$ mais différente de $AB$ détermine le même ratio $XY : YZ$, où $X$ est un point arbitraire, distinct de $B$, situé sur le premier cercle, et où $Y$ et $Z$ sont les points où $AX$ coupe les deux autres cercles, ces points étant étiquetés de façon à ce que $Y$ soit entre $X$ et $Z$.




**Solution 1**

Soit $l$ une ligne passant par $A$, mais différente de $AB$, et relions $B$ à $A$, $X$, $Y$ et $Z$ comme dans le diagramme ci-haut. Quelle que soit la ligne $l$ choisie, les angles $AXB$, $AYB$ et $AZB$ soustendent la corde $AB$. Pour cette raison, les angles des triangles $BXY$ et $BXZ$ sont les mêmes, quelle que soit $l$. Ainsi, le ratio $XY : YZ$ demeure constant, par triangles similaires.

Noter que ceci est le cas, quelles que soient les positions de $X$, $Y$ et $Z$ en relation avec $A$. Supposons que $X$, $Y$ et $Z$ se trouvent tous du même côté de $A$ (comme dans le diagramme) et soit $\measuredangle AXB = \alpha$, $\measuredangle AYB = \beta$ et $\measuredangle AZB = \gamma$. Alors $\measuredangle BXY = 180° - \alpha$, $\measuredangle BYX = \beta$, $\measuredangle BYZ = 180° - \beta$ et $\measuredangle BZY = \gamma$. Supposons maintenant que $l$ est choisie de manière à ce que $X$ soit du côté opposé de $A$, par rapport à $Y$ et $Z$. Puisque $X$ est de l'autre côté de la corde $AB$, nous avons $\measuredangle AXB = 180° - \alpha$, mais nous

### Solution 2

Soit $m$ la bissectrice perpendiculaire de $AB$ et soient $O_1$, $O_2$ et $O_3$ les centres des troi cercles. Puisque $AB$ est une corde commune aux trois cercles, les trois centres $O_1$ $O_2$ et $O_3$ se trouvent tous sur $m$. Soit $l$ la ligne passant par $A$, mais différente d $AB$, et supposons que $X$, $Y$ et $Z$ se trouvent tous du même côté de $AB$, comme au diagramme ci-haut. Soient les perpendiculaires à $l$, partant des points $O_1$, $O_2$ et $O$ puis rencontrant $m$ à $P$, $Q$ et $R$ respectivement. Puisqu'une ligne passant par le centr d'un cercle bissecte tout corde du cercle,

$$AX = 2AP, \quad AY = 2AQ \quad \text{et} \quad AZ = 2AR.$$

Or

$$XY = AY - AX = 2(AQ - AP) = 2PQ \quad \text{et similairement} \quad YZ = 2QR.$$

Ainsi $XY : YZ = PQ : QR$. Mais $O_1P \,||\, O_2Q \,||\, O_3R$, donc $PQ : QR = O_1O_2 : O_2O_3$ Puisque les centres des cercles sont fixes, le ratio $XY : YZ = O_1O_2 : O_2O_3$ ne dépen pas du choix de $l$.

Si $X$, $Y$ et $Z$ ne se trouvent pas tous du même côté de $AB$, on obtient le même résulta par une preuve similaire. Par exemple, si $X$ et $Y$ sont de côtés opposés de $AB$, alor on aura $XY = AY + AX$, mais puisque dans ce cas $PQ = AQ + AP$, on aura encor $XY = 2PQ$ et le résultat en découle toujours etc.

5. Soit $S$ un ensemble de $n$ points dans le plan, tel que la distance entre tout couple de points de $S$ soit d'au moins une unité. Démontrer qu'il existe un sous-ensemble $T$ de $S$ comportant au moins $n/7$ points et tel que la distance entre tout couple de points de $T$ soit d'au moins $\sqrt{3}$ unités.

**Solution**

On va construire l'ensemble $T$ de la façon suivante. Supposons que les points de $S$ sont dans le plan $xy$ et soit $P$ un point dans $S$ avec coordonnée $y$ maximale. Ce point $P$ fera partie de $T$. Maintenant, enlever de $S$ le point $P$ et tout autre point de $S$ à distance inférieure à $\sqrt{3}$ de $P$. Parmi les points restants de $S$, on en choisit un avec coordonnée $y$ maximale, on le déclare membre de $T$, puis on l'enlève de $S$ en même temps que tous les points à distance inférieure à $\sqrt{3}$ du point qu'on vient d'ajouter à $T$. On continue ainsi, jusqu'à épuisement de tous les points de $S$. Il est clair que tout couple de points de $S$ est à distance au moins $\sqrt{3}$. Pour montrer que $T$ possède au moins $n/7$ points, on va démontrer qu'à chaque étape du processus de construction de $T$, au plus 6 points sont enlevés de $S$ en même temps que $P$.

À une étape typique dans le processus, on a sélectionné un point $P$ avec coordonnée $y$ maximale, d'où tous les points à distance inférieure à $\sqrt{3}$ de $P$ se trouvent dans le demi cercle de rayon $\sqrt{3}$ centré à $P$, indiqué au premier diagramme ci-bas. Puisque les points de $S$ sont à distance au moins 1 les uns des autres (donc de $P$), ces points se trouvent en dehors du demi cercle de rayon 1 (ou sur sa frontière). (Ainsi, ils se trouvent dans la partie ombrée au premier diagramme.) Divisons maintenant cette région ombrée en 6 régions congrues $R_1, R_2, \ldots, R_6$ comme indiqué au diagramme.

Nous allons maintenant montrer que chacune de ces régions contient au plus un point de $S$. Puisque les 6 régions sont congrues, on en considère qu'une seule, comme indiqué au deuxième diagramme ci-bas. La distance entre deux points de cette région est au plus égale à la longueur du segment $AB$. Or les longueurs de $PA$ et $PB$ sont de $\sqrt{3}$ et 1 respectivement et l'angle $APB$ est 30°. Si on construit la perpendiculaire de $B$ vers $PA$ à $C$, on voit que la longueur de $PC$ est $\cos 30° = \sqrt{3}/2$. Ainsi, $BC$ est la bissectrice perpendiculaire de $PA$, d'où $AB = PB = 1$. Donc la distance entre deux points de la région est moins que 1. En conséquence chacune des régions $R_1, \ldots, R_6$ contient au plus 1 point de $S$, ce qui complète la preuve.