1999
SOLUTIONS

Les solutions des problèmes de l'OCM 1999 que nous présentons sont traduites directement des solutions des concurrents. Nous ne les avons éditées qu'au minimum - certaines étapes inutiles ont été supprimées et le style a été légèrement adapté pour éclaircir la présentation.

Solution du Problème 1 – Adrian Chan, Upper Canada College, Toronto, ON

En réarrangeant l'équation on obtient $4x^2 + 51 = 40[x]$. Il est connu que $x \geq [x] > x - 1$, et donc

$$\begin{aligned} 4x^2 + 51 = 40[x] &> 40(x-1) \\ 4x^2 - 40x + 91 &> 0 \\ (2x-13)(2x-7) &> 0 \end{aligned}$$

Ainsi $x > 13/2$ or $x < 7/2$. De plus,

$$\begin{aligned} 4x^2 + 51 = 40[x] &\leq 40x \\ 4x^2 - 40x + 51 &\leq 0 \\ (2x-17)(2x-3) &\leq 0 \end{aligned}$$

Alors $3/2 \leq x \leq 17/2$. En combinant ces inégalités, on obtient

$3/2 \leq x < 7/2$ ou bien $13/2 < x \leq 17/2$.

<u>**CAS 1**</u>: $3/2 \leq x < 7/2$.

Pour ce cas, les valeurs possibles de $[x]$ sont 1, 2 et 3.

Si $[x] = 1$, alors $4x^2 + 51 = 40 \cdot 1$ et donc $4x^2 = -11$, qui ne possède aucune solution réelle.

Si par contre $[x] = 2$, alors $4x^2 + 51 = 40 \cdot 2$ et donc $4x^2 = 29$ et $x = \frac{\sqrt{29}}{2}$. Remarquons que $\frac{\sqrt{16}}{2} < \frac{\sqrt{29}}{2} < \frac{\sqrt{36}}{2}$ et donc $2 < x < 3$ et $[x] = 2$.

Si finalement $[x] = 3$, alors $4x^2 + 51 = 40 \cdot 3$ et $x = \sqrt{69}/2$. Mais $\frac{\sqrt{69}}{2} > \frac{\sqrt{64}}{2} = 4$. Cette solution est donc rejetée.

<u>**CAS 2**</u>: $13/2 < x \leq 17/2$.

Dans ce cas, les valeurs possibles de $[x]$ sont 6, 7 et 8.

Si d'abord $[x] = 6$, alors $4x^2 + 51 = 40 \cdot 6$ et donc $x = \frac{\sqrt{189}}{2}$. Remarquons que $\frac{\sqrt{144}}{2} < \frac{\sqrt{189}}{2} < \frac{\sqrt{196}}{2}$ et donc $6 < x < 7$ et $[x] = 6$.

Si maintenant $[x] = 7$, alors $4x^2 + 51 = 40 \cdot 7$ et donc $x = \frac{\sqrt{229}}{2}$. Remarquons que $\frac{\sqrt{196}}{2} < \frac{\sqrt{229}}{2} < \frac{\sqrt{256}}{2}$ et donc $7 < x < 8$ et $[x] = 7$.

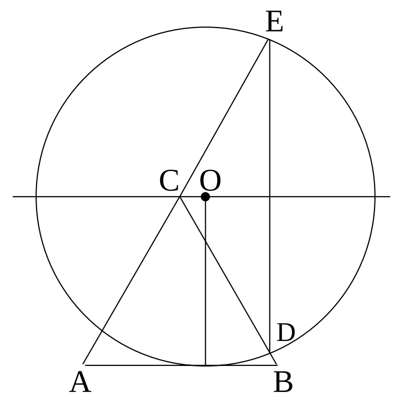
Si finalement $[x] = 8$, alors $4x^2 + 51 = 40 \cdot 8$ et donc $x = \frac{\sqrt{269}}{2}$. Remarquons que $\frac{\sqrt{256}}{2} < \frac{\sqrt{269}}{2} < \frac{\sqrt{324}}{2}$ et donc $8 < x < 9$ et $[x] = 8$.

Les solutions sont $x = \dfrac{\sqrt{29}}{2}\ ,\ \dfrac{\sqrt{189}}{2}\ ,\ \dfrac{\sqrt{229}}{2}\ ,\ \dfrac{\sqrt{269}}{2}$.

(Note de l'éditeur: Adrian aura maintenant vérifier ces quatre solutions.)

Solution 1 au Problème 2 – Keon Choi, A.Y. Jackson S.S., North York, ON

Soit D et E les intersections de BC et l'extension de AC respectivement avec le cercle.



Puisque $CO||AB$ (comme la hauteur et le rayon ont tous deux la valeur 1) $\angle BCO = 60°$ et donc $\angle ECO = 180° - \angle ACB - \angle BC0 = 60°$.

Puisqu'un cercle est toujours symétrique par rapport à son diamètre et la droite CE est la réflexion de la droite CB par rapport à CO, le segment de droite CE est la réflexion du segment de droite CB.

Donc $CE = CD$.
Le triangle $\triangle CED$ est donc isocèle.

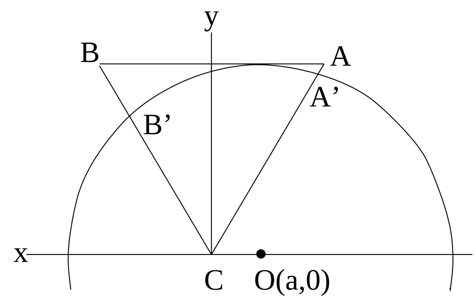
Et donc $\angle CED = \angle CDE$ et $\angle CED + \angle CDE = \angle ACB = 60°$.

$\angle CED = 30°$ qu'importe la position du centre 0. Puisque $\angle CED$ est aussi l'angle sous-tendu de l'arc à l'intérieur du triangle, si CED est constant, la longueur de l'arc sera aussi constante.

Note de l'éditeur: Cette démonstration a été présentée telle quelle.

Solution 2 au Problème 2 – Jimmy Chui, Earl Haig S.S., North York, ON

Plaçons le point C à l'origine, le point A à $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ et le point B à $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$. Alors $\triangle ABC$ est équilatéral avec une hauteur de longueur 1.



Soit O le centre du cercle. Puisque le rayon du cercle est 1, et puisqu'il touche la droiteAB, le centre O se trouvera sur la droite parallèle à AB passant par C (puisque C est à une distance 1 de AB), et dons le centre O se trouve sur l'axe x.

Posons le point O à $(a, 0)$. Alors $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ suivant la restriction que le cercle tourne le long de AB.

Maintenant, soient A' et B' les intersections du cercle avec CA et CB respectivement. L'équations de CA est $y = \sqrt{3}\, x,\ 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, celle de CB est $y = -\sqrt{3}\, x,\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq 0$, set celle du cercle $(x-a)^2 + y^2 = 1$.

O peut résoudre selon A' en substituant $y = \sqrt{3}\, x$ dans $(x-a)^2+y^2 = 1$ pour donner $x = \dfrac{a \pm \sqrt{4-3a^2}}{4}$.

On peut maintenant s'apercevoir visuellement que les solutions représentent les intersections de l'extension de AC avec le cercle, mais on ne s'intéresse que sur la plus grande valeur de x – il s'agit de la solution se trouvant sur AC, et non pas sur l'extension de AC. Ainsi donc,

$$x = \frac{a+\sqrt{4-3a^2}}{4}\ , \qquad y = \sqrt{3}\left(\frac{a+\sqrt{4-3a^2}}{4}\right).$$

De même façon, on peut résoudre selon B', mais cette fois avec la plus petite valeur de x pour donner

$$x = \frac{a-\sqrt{4-3a^2}}{4}\ , \qquad y = -\sqrt{3}\left(\frac{a+\sqrt{4-3a^2}}{4}\right).$$

Trouvons maintenant la longueur de $A'B'$:

$$\begin{aligned}
|A'B'|^2 &= \left(\frac{a+\sqrt{4-3a^2}}{4} - \frac{a-\sqrt{4-3a^2}}{4}\right)^2 + \left(\left(\sqrt{3}\,\frac{a+\sqrt{4-3a^2}}{4}\right) - \left(-\sqrt{3}\,\frac{a-\sqrt{4-3a^2}}{4}\right)\right)^2 \\
&= \frac{4-3a^2}{4} + 3\,\frac{a^2}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

qui se trouve indépendant de a.

Considérons les points 0, A' et B'. $\triangle 0A'B'$ est équilatéral (puisque $A'B' = 0A' = 0B' = 1$).

Donc $\angle A'0B' = \frac{\pi}{3}$ et l'arc $A'B' = \frac{\pi}{3}$, une valeur constant.

Solution au Problème 3 – Masoud Kamgarpour, Carson S.S., North Vancouver, BC

Remarquons que $n = 1$ constitue une solution. Pour $n > 1$, écrivons n dans la forme $n = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} ... P_m^{\alpha_m}$ où les P_i's, $1 \leq i \leq m$, sont des nombres premiers distincts et $\alpha_i > 0$. Puisque $d(n)$ est entier, n est donc un carré parfait, donc $\alpha_i = 2\beta_i$ pour des nombres entiers $\beta_i > 0$.

En utilisant la formule pour le nombre de diviseurs de n,

$$d(n) = (2\beta_1 + 1)(2\beta_2 + 1) \ldots (2\beta_m + 1)$$

ce qui est un nombre impair. Puisque maintenant $d(n)$ est impair, $(d(n))^2$ est impair également, et donc de même pour n, at alors $P_i \geq 3, 1 \leq i \leq m$. On aura

$$P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \ldots P_m^{\alpha_m} = [(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)]^2$$

ou en utilisant $\alpha_i = 2\beta_i$

$$P_1^{\beta_1} P_2^{\beta_2} \ldots P_m^{\beta_m} = (2\beta_1 + 1)(2\beta_2 + 1) \ldots (2\beta_m + 1).$$

Nous démontrons maintenant ce lemme:

Lemme: $P^t \geq 2t + 1$ pour tout entier positif t et $P \geq 3$, avec égalité si et seulement si P=3 et t=1.

Démonstration: Nous procédons par récurrence selon t. L'énoncé est facilement vérifié pour $t = 1$ puisque $P \geq 3$. Supposons maintenant que $P^k \geq 2k + 1, k \geq 1$; on aura

$$P^{k+1} = P^k \cdot P \geq P^k(1 + 2) > P^k + 2 \geq (2k + 1) + 2 = 2(k + 1) + 1$$

Donc $P^t \geq 2t + 1$ avec égalité si et seulement si $P = 3$ et $t = 1$.

Soit $P_k > 3$ un diviseur premier de n; alors (suivant le lemme) $P_k^{\beta_k} > 2\beta_k + 1$ et on obtient $P_1^{\beta_1} \ldots P_m^{\beta_m} > (2\beta_1 + 1) \ldots (2\beta_m + 1)$, une contradiction.

Donc, le seul diviseur premier de n est $P = 3$ et on aura $3^\alpha = 2\alpha + 1$. Par le lemme $\alpha = 1$.

Les seules solutions entières positives sont donc 1 et 9.

Solution 1 au Problème 4 – David Nicholson, Fenelon Falls S.S., Fenelon Falls, ON

On peut supposer sans perte de généralité que $a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_8$.

Supposons de plus qu'il n'existe pas de tel entier k. Regardons de plus près aux sept différences $d_i = a_{i+1} - a_i$. Parmi ces d_i on trouvera deux 1 au plus, deux 2, et deux 3, qui donnera 12 au total.

Maintenant $16 = 17 - 1 \geq a_8 - a_1 = d_1 + d_2 + \ldots + d_7$ et les sept différences doivent donc être 1,1,2,2,3,3,4.

Occupons-nous donc de réarranger ces différences 1,1,2,2,3,3,4. Remarquons que la somme des différences consécutives est elle-même une autre différence. (Par exemple $d_1 + d_2 = a_3 - a_1$, $d_1 + d_2 + d_3 = a_4 - a_1$)

On ne peut placer les deux 1 côte à côte car elles nous donneraient une autre différence de 2. Les 1s ne peuvent se trouver à côté un 2 car on aurait trois 3. Ils ne peuvent tous les deux se trouver à côté d'un 3 car on aurait alors trois 4! On aura donc ou $1, 4, -, -, -, 3, 1$ ou bien $1, 4, 1, 3, -, -, -$ (ou leurs réflexions).

Dans chaque cas on retrouve un 3,1 donnant une différence de 4 et on ne peut donc pas placer les 2 côte à côte. De plus, on ne peut avoir 2,3,2 puisqu'alors (avec le 1,4) on aurait trois 5. On a donc une contradiction dans tous les cas. Il y a donc toujours trois différences égales.

Un ensemble de sept nombres satisfaisant les conditions données est $\{1, 2, 4, 7, 11, 16, 17\}$. (Note de l'éditeur: Il existe plusieurs de ces ensembles)

Solution 2 au Problème 4 – Le comité de l'OMC

Considérons toutes les différences consécutives (utilisons la notation d_i ci-haute) de même que toutes les différences $b_i = a_{i+2} - a_i$, $i = 1 \ldots 6$. Alors la somme de ces treize différences est $2 \cdot (a_8 - a_1) + (a_7 - a_2) \leq 2(17-1) + (16-2) = 46$. Si aucune différence ne se répète plus d'une fois, la plus petite valeur possible des sommes des treize différences est $2 \cdot (1+2+3+4+5+6) + 7 = 49$, ce qui entraîne une contradiction.

Solution 1 au Problème 5 – Le comité de l'OMC

Soit $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$. Nous devons déterminer où f prendra ses valeurs maximales. Puisque f est une fonction cyclique, on peut donc supposer sans perte de généralité que $x \geq y,\ z$. Puisque de plus

$$\begin{aligned} f(x,y,z) - f(x,z,y) &= x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - z^2y - y^2x \\ &= (y-z)(x-y)(x-z), \end{aligned}$$

on peut aussi supposer que $y \geq z$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x+z,y,0) - f(x,y,z) &= (x+z)^2y - x^2y - y^2z - z^2x \\ &= z^2y + yz(x-y) + xz(y-z) \geq 0, \end{aligned}$$

et on peut supposer que $z = 0$. La conclusion découle alors de l'inégalité de la moyenne arithmétique-géométrique:

$$f(x,y,0) = \frac{2x^2y}{2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x+x+2y}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

On aura égalité lorsque $x = 2y$, et donc lorsque $(x,y,z) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$. (De même qu'à $(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ et $(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$.

Solution 2 au Problème 5 – Le comité de l'OMC

Utilisant la fonction f comme ci-haut, et $x \geq y, z$

$$f\left(x + \frac{z}{2},\ y + \frac{z}{2},\ 0\right) - f(x,y,z) \quad = \quad yz(x-y) + \frac{xz}{2}(x-z) + \frac{z^2y}{4} + \frac{z^3}{8}$$

et on pourra supposer que $z = 0$. La conclusion découle maintenant comme dans la première solution.

RAPPORT DES CORRECTEURS

Chaque problème a une valeur maximum de 7 points. Chaque solution de chaque examen a été corrigée par deux correcteurs différents. Si les deux marques différaient par plus d'un point, alors la solution fut reconsidérée jusqu'à ce que les différences soient résolues. Si les deux marques ne diffèrent que d'un seul point, alors la moyenne est utilisée pour calculer le résultat total.

Les divers résultats accordés à chaque problème, en pourcentage, sont indiqués comme suit. (En utilisant les résultats des deux correcteurs, après la résolution des différences.)

POINTS	#1	#2	#3	#4	#5
0	7.6	45.6	18.4	38.6	51.3
1	13.9	15.8	43.0	0.0	32.3
2	12.0	12.7	15.2	41.8	13.9
3	5.7	2.5	5.1	7.6	2.5
4	4.4	1.3	8.9	4.4	0.0
5	8.9	2.5	3.2	5.7	1.3
6	8.9	0.0	1.3	1.9	0.0
7	39.9	20.9	6.3	1.3	0.0

PROBLÈME 1

Le but de ce premier problème était de donner aux candidats une chance à un bon départ, mais n'était pas facile du tout. Seulement la moitié des étudiants ont eu un bon résultat de 5, 6 ou 7.

L'approche générale était de trouver une borne pour x pour ensuite trouver sa valeur exacte en substituant les diverses possibilités de $[x]$. Dépendant de la borne trouvée, tout cela se traduisait dans la vérification de 6 à 10 cas différents.

PROBLÈME 2

Plusieurs compétiteurs se sont vite aperçus qu'il fallait montrer que l'angle sous tenu par l'arc à son centre est constant, soit $\pi/3$. En tout, 16 étudiants ont réussi une démonstration complète. La plupart ont tenté une solution analytique - en réalité, le problème est presque banal si l'on choisit des coordonnées d'une façon astucieuse, et plus tard remarque que deux telles x-coordonnées forment des racines d'une même équation quadratique. Quelques étudiants ont utilisé la trigonométrie, en particulier la loi des sinus sur des triangles bien choisis. Deux étudiants ont trouvé la même solution synthétique, de façon bien élégante.

PROBLÈME 3

La plupart des compétiteurs ont rapidement trouvé par un calcul direct que $n = 1$ et $n = 9$ sont en effet des solutions. La difficulté demeurait à montrer qu'il s'agissait des seules solutions, ce qui revient à montrer que $p^k \geq 2k + 1$ pour tout nombre premier $p > 2$ et tout $k > 0$ avec égalité si et seulement si $k = 1$ et $p = 3$. On pouvait le démontrer par récurrence ou alors en utilisant le calcul différentiel.

PROBLÈME 4

Plusieurs étudiants ont trouvé un ensemble spécifique de sept nombres entiers tels que l'équation on'avait pas trois solutions différentes, ce qui valait deux points. (Un des étudiants a trouvé un tel ensemble ayant un maximum de 14; une valeur maximale de 13 n'est pas possible.)

Seulement huit des compétiteurs ont reçu un bon résultat sur ce problème (5, 6 ou 7), et un seul d'eux a reçu un 7 parfait. Tous ceux qui ont réussi ont considéré la différence d'entiers successifs, montrant qu'ils doivent être 1, 1, 2, 2, 3, 3, et 4, pour ensuite montrer que tout arrangement de ces différences donne au moins trois répétitions de la même valeur. La plupart ont réalisé que les 1 ne pouvaient pas se trouver ensemble, et ne pouvaient non plus se trouver voisins d'un 2. Ils ont alors considéré tous ces arrangements possibles, ce qui emmène près d'une douzaine de cas (dépendant de la manière dont ils furent choisis). David Nicholson a été le plus effectif à s'occuper de tous les cas. (Voir la solution 1 du problème 4). La plupart des étudiants ont oublié un ou deux cas (facile à résoudre), et ont perdu 1 ou 2 points.

Un bon nombre des concurrents ont essayé de résoudre le problème en examinant the caractère pair-impair de l'ensemble des huit nombres entiers, comptant combien des différences sont ou paires ou impaires, et utilisant le principe des trous de pigeons. Bien que cette approche apparaisse prometteuse, aucun n'a été capable de résoudre le cas où 3 des entiers étaient de même parité, et les 5 autres de l'autre parité.

PROBLÈME 5

Personne n'a reçu une marque parfaite pour ce problème. Pourtant, un des étudiants a reçu une marque de 5 points pour une solution ayant des erreurs mineures. Cette solution utilisait le calcul différentiel. Le comité savait que le problème pouvait être résoudre avec le calcul différentiel, mais (en erreur) croyait invraisemblable qu'un étudiant du secondaire s'attaquerait à une telle solution. Plusieurs étudiants ont reçu 1 point pour "deviner" que $\left(\frac{2}{3}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ 0\right)$, $\left(0,\ \frac{2}{3}\,,\ \frac{1}{3}\right)$ et $\left(\frac{1}{3}\,,\ 0\,,\ \frac{2}{3}\right)$ sont exactement où l'égalité aura lieu. Des étudiants ont reçu un point supplémentaire pour avoir vérifié l'inégalité sur la frontière de la région.