1998
SOLUTIONS

Les solutions des problèmes de l'OCM 1998 que nous présentons proviennent directement des solutions des concurrents. Nous ne les avons éditées qu'au minimum - certaines étapes inutiles ont été supprimées et le style a été légèrement adapté pour éclaircir la présentation.

Solution du problème 1 – David Arthur, Upper Canada College, Toronto, ON

Soit $a = 30k + r$, où k est un entier et r est un nombre réel entre 0 et 29 inclusivement.

Alors $\left[\frac{1}{2}\,a\right] = \left[\frac{1}{2}\,(30k+r)\right] = 15k + \left[\frac{r}{2}\right]$. De même, $\left[\frac{1}{3}\,a\right] = 10k + \left[\frac{r}{3}\right]$ and $\left[\frac{1}{5}\,a\right] = 6k + \left[\frac{r}{5}\right]$.

De plus, $\left[\frac{1}{2}\,a\right] + \left[\frac{1}{3}\,a\right] + \left[\frac{1}{5}\,a\right] = a$, alors $\left(15k + \left[\frac{r}{2}\right]\right) + \left(10k + \left[\frac{r}{3}\right]\right) + \left(6k + \left[\frac{r}{5}\right]\right) = 30k + r$ et donc $k = r - \left[\frac{r}{2}\right] - \left[\frac{r}{3}\right] - \left[\frac{r}{5}\right]$.

Evidement, r doit être entier puisque $r - \left[\frac{r}{2}\right] - \left[\frac{r}{3}\right] - \left[\frac{r}{5}\right]$ doit aussi l'être, et ne peut donc pas être égal à k.

D'autre part, si r est entier, alors $r - \left[\frac{r}{2}\right] - \left[\frac{r}{3}\right] - \left[\frac{r}{5}\right]$ sera aussi entier, donnant exactement une solution pour k.

Pour chaque valeur de $r (0 \leq r \leq 29)$, $\;a = 30k + r$ aura un reste mod 30 différent, et donc deux valeurs différentes de r donneront des valeurs différentes de a.

Puisqu'on trouve 30 valeurs possibles pour $r (0, 1, 2, \ldots, 29)$, on aura donc 30 solutions pour a.

Solution to problème 2 – Jimmy Chui, Earl Haig S.S., North York, ON

Puisque $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{1/2} \geq 0$ et $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/2} \geq 0$, on en déduit que $0 \leq \left(x-\frac{1}{x}\right)^{1/2} + \left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/2} = x$.

Remarquons aussi que $x \neq 0$. Autrement, $\frac{1}{x}$ ne serait pas défini, et donc $x > 0$.

En calculant le carré des deux côtés, on obtient

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(x-\frac{1}{x}\right) + \left(1-\frac{1}{x}\right) + 2\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)} \\ x^2 &= x+1-\frac{2}{x}+2\sqrt{x-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Multipliant maintenant les deux côtés par x donne, après un réarrangement,

$$\begin{aligned} x^3-x^2-x+2 &= 2\sqrt{x^3-x^2-x+1} \\ (x^3-x^2-x+1)-2\sqrt{x^3-x^2-x+1}+1 &= 0 \\ (\sqrt{x^3-x^2-x+1}-1)^2 &= 0 \\ \sqrt{x^3-x^2-x+1} &= 1 \\ x^3-x^2-x+1 &= 1 \\ x(x^2-x-1) &= 0 \\ x^2-x-1 &= 0 \qquad \text{puisque } x \neq 0. \end{aligned}$$

Donc $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On doit alors vérifier qu'il s'agit vraiment de solutions.

Soient $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Remarquons que $\alpha+\beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ et $\alpha > 0 > \beta$.

Puisque $\beta < 0$, β n'est pas une solution.

Si maintenant $x = \alpha$, alors

$$\begin{aligned} \left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} + \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} &= (\alpha+\beta)^{1/2} + (1+\beta)^{1/2} && (\text{puisque } \alpha\beta - -1) \\ &= 1^{1/2} + (\beta^2)^{1/2} && (\text{puisque } \alpha+\beta = 1 \text{ et} \beta^2 = \beta+1) \\ &= 1-\beta && (\text{puisque } \beta < 0) \\ &= \alpha && (\text{puisque } \alpha+\beta = 1). \end{aligned}$$

Donc $x = \alpha$ est la solution unique de l'équation.

Solution 1 du problème 3 – Chen He, Columbia International Collegiate, Hamilton, ON

$$1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\frac{1}{2n-1} \tag{1}$$

Puisque

$$\frac{1}{3}>\frac{1}{4},\;\;\frac{1}{5}>\frac{1}{6},\;\ldots,\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}\,,$$

(1) entraîne

$$1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right). \tag{2}$$

Puisque de plus

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{4}\,,\;\;\frac{1}{2}>\frac{1}{6}\,,\;\;\frac{1}{2}>\frac{1}{8}\,,\;\;\ldots\,,\;\;\frac{1}{2}>\frac{1}{2n}$$

alors

$$\frac{n}{2}=\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{n}>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

et donc

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right). \tag{3}$$

On en déduit ainsi de (1), (2) et(3) que

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1} &> \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)\\ &= \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).\end{aligned}$$

Finalement, on aura $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$ pour tout $n\in N$ et $n\geq 2$.

Solution 2 du problème 3 – Yin Lei, Vincent Massey S.S., Windsor, ON

Puisque $n \geq 2$, on a donc $n(n+1) \geq 0$. L'inégalité donnée est donc équivalente à

$$n\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right) \geq (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

Nous allons la démontrer par récurrence.

Pour $n=2$, on a évidemment $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$.

Supposons maintenant l'inégalité valide pour $n=k$, voir

$$k\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right) > (k+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right). \tag{1}$$

Nous devons donc la démontrer maintenant pour $n=k+1$.

Nous savons que

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)\\
&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\\
&=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k)}\quad.
\end{aligned}$$

Puisque maintenant

$$1\times 2<3\times 4<5\times 6<\ldots<(2k-1)(2k)<(2k+1)(2k+2)$$

alors

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k)}>\frac{k}{(2k+1)(2k+2)}$$

et donc

$$1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{k}{(2k+1)(2k+2)}. \tag{2}$$

De plus,

$$\frac{k+1}{2k+1}-\frac{k+2}{2k+2}=\frac{2k^2+2k+2k+2-2k^2-4k-k-2}{(2k+1)(2k+2)}=-\frac{k}{(2k+1)(2k+2)}$$

Ce qui emmène

$$\frac{k+1}{2k+1}=\frac{k+2}{2k+2}-\frac{k}{(2k+1)(2k+2)}. \tag{3}$$

Additionnant 1, 2 et 3 entraîne

$$k\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{k+1}{2k+1}$$

$$>(k+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k}{(2k+1)(2k+2)}+\frac{k+2}{2k+2}-\frac{k}{(2k+1)(2k+2)}$$

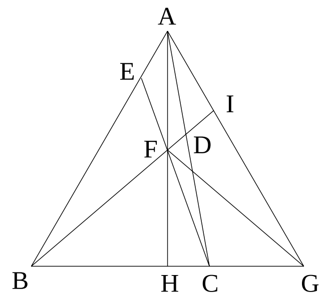
Finalement, un réarrangement des deux côtés donne

$$(k+1)\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k+1}\right)>(k+2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k+2}\right),$$

ce qui complète la récurrence.

Solution 1 du problème 4 – Keon Choi, A.Y. Jackson S.S., North York, ON

Soit H le pied de la perpendiculaire de A à BC; construisons un triangle équilatéral $\triangle ABG$, avec C sur BG. Nous montrons que si F est le point d'intersection de AH et BD, alors $\angle FCB = 70°$. (En effet, ceci montre que AH, ainsi que les droites données BD et CE se joignent en un seul point, ce qui résout le problème.) Supposons que l'extension de BD rencontre AG en I.



Alors $BF = GF$ et$\angle FBG = \angle FGB = 40°$, de sorte que $\angle IGF = 20°$. De même, $\angle IFG = \angle FBG + \angle FGB = 80°$, de sorte que

$$\begin{aligned}\angle FIG &= 180° - \angle IFG - \angle IGF \\ &= 180° - 80° - 20° \\ &= 80°.\end{aligned}$$

Il s'en suit que $\triangle GIF$ soit un triangle isocèle, et donc

$$GI = GF = BF. \tag{1}$$

Mais $\triangle BGI$ et $\triangle ABC$ sont semblables, puisque $BG = AB$, $\angle GBI = \angle BAC$, $\angle BGI = \angle ABC$.

On pourra donc en déduire que

$$GI = BC. \tag{2}$$

On obtient maintenant de (1) et (2)

$$BC = BF.$$

Ainsi, dans le $\triangle BCF$,

$$\angle BCF = \frac{180° - \angle FBC}{2} = \frac{180° - 40°}{2} = 70°.$$

En conclusion, on aura bien $\angle FCB = 70°$ ce qui démontre que les droites CE et BD ainsi que la perpendiculaire AH se rencontrent en un seul point.

Solution 2 du problème 4 – Adrian Birka, Lakeshore Catholic H.S., Port Colborne, ON

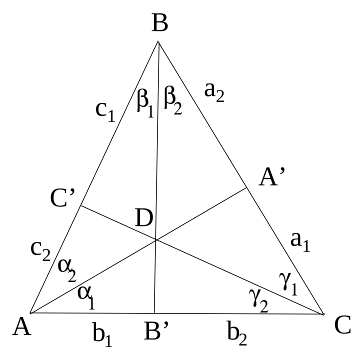
Nous démontrons d'abord le lemme suivant:

Dans le triangle $\triangle ABC$, AA', BB', CC' s'entrecoupent si et seulement si

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ sont comme indiqués dans le diagramme ci-dessous.

(Note de l'éditeur: il s'agit d'une variante connue du théorème de Ceva.)



Démonstration: soit $\angle BB'C = x$, alors $\angle BB'A = 180° - x$. Utilisant la loi des sinus dans le triangle $\triangle BB'C$ donne

$$\frac{b_2}{\sin\beta_2}=\frac{a}{\sin x}\,. \tag{1}$$

Utilisant pareillement la loi des sinus pour le triangle $\triangle BB'A$ donne

$$\frac{b_1}{\sin\beta_1}=\frac{c}{\sin(180°-x)}=\frac{c}{\sin x}\,. \tag{2}$$

On aura donc

$$b_1 : b_2=\frac{c\sin\beta_1}{a\sin\beta_2} \tag{3}$$

(de (1),(2)). (Note de l'éditeur: peut-on reconnaître la formule si $\beta_1 = \beta_2$?)

De même,

$$a_1 : a_2=\frac{b\sin\alpha_1}{c\sin\alpha_2},\quad c_1 : c_2=\frac{a\sin\gamma_1}{b\sin\gamma_2}\,. \tag{4}$$

Il découle maintenant du théorème de Ceva qu'une condition suffisante et nécessaire afin que AA', BB', CC' se rencontrent tous en un seul point est que: $(a_1 : a_2)\cdot(b_1 : b_2)\cdot(c_1 : c_2) = 1$. Utilisant donc (3), (4) sur cette condition nous emmène à:

$$\frac{b}{c} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = 1$$

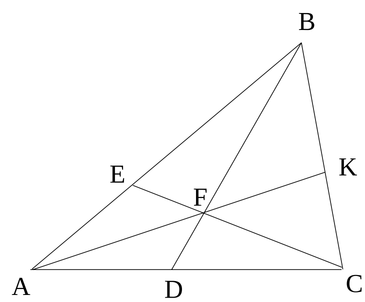
et donc

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1. \tag{5}$$

Il s'agit exactement de ce qu'on avait besoin pour démontrer le lemme.

Si l'on pose maintenant $\angle BAC = 40°$, $\angle ABC = 60°$ dans l'équation de départ, il s'en suit que $\angle ACB = 80°$.

Puisque $\angle CBD = 40°$, on a donc $\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 20°$. De même, $\angle ECA = 20°$.



On montre maintenant que $\angle FAD = 10°$. Autrement, soit F' tel que F, F' se trouvent du même côté de AC et $\angle DAF' = 10°$. Alors $\angle BAF' = \angle BAC - \angle DAF' = 30°$.

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \angle ABD}{\sin \angle DBC} \cdot \frac{\sin \angle BCE}{\sin \angle ECA} \cdot \frac{\sin \angle CAF'}{\sin \angle F'AB} &= \frac{\sin 20°}{\sin 40°} \cdot \frac{\sin 70°}{\sin 10°} \cdot \frac{\sin 10°}{\sin 30°} \\
&= \frac{\sin 20°}{2 \sin 20° \cos 20°} \cdot \frac{\cos 20°}{\sin 30°} \\
&= \frac{1}{2 \sin 30°} = 1.
\end{aligned}$$

On en déduira du lemme ci-haut que AF' passe par $CE \cap BD = F$. Ainsi, $AF' = AF$, et $\angle FAD = 10°$, contrairement à notre hypothèse, et donc $\angle FAD$ doit être $10°$. Soit maintenant $AF \cap BC = K$. Puisque $\angle KAC = 10°$, $\angle KCA = 80°$, il s'en suit que $\angle AKC = 90°$. On en conclut que $AK \perp BC \Rightarrow AF \perp BC$, comme désiré.

Solution du problème 5 – Adrian Chan, Upper Canada College, Toronto, ON

Nous démontrons d'abord par récurrence que $\dfrac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{a_n \cdot a_{n+1} + 1} = m^2$ pour tout $n \geq 0$.

Démonstration:

Cas de base ($n = 0$) : $\dfrac{a_0^2 + a_1^2}{a_0 \cdot a_1 + 1} = \dfrac{0 + m^2}{0 + 1} = m^2$.

Supposons maintenant l'équation vérifiée pour $n = k, k \geq 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{a_k^2 + a_{k+1}^2}{a_k \cdot a_{k+1} + 1} &= m^2 \\
a_k^2 + a_{k+1}^2 &= m^2 \cdot a_k \cdot a_{k+1} + m^2 \\
a_{k+1}^2 + m^4 a_{k+1}^2 - 2m^2 \cdot a_k \cdot a_{k+1} + a_k^2 &= m^2 + m^4 a_{k+1}^2 - m^2 \cdot a_k \cdot a_{k+1} \\
a_{k+1}^2 + (m^2 a_{k+1} - a_k)^2 &= m^2 + m^2 a_{k+1}(m^2 a_{k+1} - a_k) \\
a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 &= m^2 + m^2 \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \,.
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2}{a_{k+1} \cdot a_{k+2} + 1} = m^2$,

ce qui complète la récurrence. Ainsi (a_n, a_{n+1}) est une solution de $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1} = m^2$ pour tout $n \geq 0$.

Considérons alors l'équation $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1} = m^2$, et supposons que $(a, b) = (x, y)$ soit une solution telle que $0 \leq x \leq y$. Alors

$$\frac{x^2 + y^2}{xy + 1} = m^2. \tag{1}$$

Si $x = 0$, alors il en découle facilement que $y = m$, et donc $(x, y) = (a_0, a_1)$. Puisque l'on nous donne $x \geq 0$, supposons de plus que $x > 0$.

Nous montrons que $y \leq m^2 x$.

Preuve par contradiction: supposons que $y > m^2 x$. Alors $y = m^2 x + k$ pour un certain $k \geq 1$.

Une substitution dans (1) entraîne

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + (m^2 x + k)^2}{(x)(m^2 x + k) + 1} &= m^2 \\
x^2 + m^4 x^2 + 2m^2 xk + k^2 &= m^4 x^2 + m^2 kx + m^2 \\
(x^2 + k^2) + m^2(kx - 1) &= 0.
\end{aligned}$$

Maintenant, $m^2(kx-1) \geq 0$ puisque $kx \geq 1$ et $x^2 + k^2 \geq x^2 + 1 \geq 1$, et donc $(x^2+k^2)+m^2(kx-1) \neq 0$.

On obtient ainsi une contradiction, ce qui établi que $y \leq m^2 x$ si $x > 0$.

En substituant $y = m^2x - x_1$ dans (1), où $0 \leq x_1 < m^2x$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + (m^2x - x_1)^2}{x(m^2x - x_1) + 1} &= m^2 \\
x^2 + m^4x^2 - 2m^2x \cdot x_1 + x_1^2 &= m^4x^2 - m^2x \cdot x_1 + m^2 \\
x^2 + x_1^2 &= m^2(x \cdot x_1 + 1) \\
\frac{x^2 + x_1^2}{x \cdot x_1 + 1} &= m^2. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Si $x_1 = 0$, alors $x^2 = m^2$. Dons $x = m$ et $(x_1, x) = (0, m) = (a_0, a_1)$. Mais $y = m^2x - x_1 = a_2$, et donc $(x, y) = (a_1, a_2)$. On peut donc supposer que $x_1 > 0$.

Nous montrons que $x_1 < x$.

Preuve par contradiction: supposons que $x_1 \geq x$.

Il en découle que $m^2x - y \geq x$ puisque $y = m^2x - x_1$, et $\left(\frac{x^2 + y^2}{xy + 1}\right) x - y \geq x$ puisque (x, y) est une solution de $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = m^2$.

Donc $x^3 + xy^2 \geq x^2y + xy^2 + x + y$, et alors $x^3 \geq x^2y + x + y$ ce qui emmène une contradiction car $y \geq x > 0$.

Un raisonnement semblable à la démonstration de $y \leq m^2x$ donne $x \leq m^2x_1$. La substitution $x = m^2x_1 - x_2$ avec $x_2 \geq 0$ est donc valide.

Une substitution de $x = m^2x_1 - x_2$ dans (2) donne $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2 + 1} = m^2$.

Si $x_2 \neq 0$, alors on procède avec la substitution $x_i = m^2_{x_{i+1}} - x_{i+2}$ (*) jusqu'à l'on obtienne $\frac{x_j^2 + x_{j+1}^2}{x_j \cdot x_{j+1} + 1} = m^2$ et $x_{j+1} = 0$. (La suite de nombres entiers non-négatifs x_i est décroissante.)

Si de plus $x_{j+1} = 0$, alors $x_j^2 = m^2$, $x_j = m$ et $(x_{j+1}, x_j) = (0, m) = (a_0, a_1)$.

Donc $(x_j, x_{j-1}) = (a_1, a_2)$ puisque $x_{j-1} = m^2x_j - x_{j+1}$ (de (*)).

En continuant de la sorte, on aura $(x_1, x) = (a_{n-1}, a_n)$ pour une certaine valeur de n. Donc $(x, y) = (a_n, a_{n+1})$. Finalement, $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = m^2$ aura une des solutions (a, b) si et seulement si $(a, b) = (a_n, a_{n+1})$ pour une certaine valeur de n.

RAPPORT DES CORRECTEURS

Chaque problème a une valeur maximum de 7 points. Chaque solution de chaque examen a été corrigée par deux correcteurs. Si les deux marques différaient par plus d'un point, alors la solution fut reconsidérée jusqu'à ce que les différences soient résolues. Si les deux marques ne diffèrent que d'un seul point, alors la moyenne est utilisée pour calculer le résultat total.

Les divers résultats accordés à chaque problème, en pourcentage, sont indiqués comme suit.

POINTS	#1	#2	#3	#4	#5
0	7.6	9.8	40.2	31.0	73.9
1	14.1	27.7	7.1	27.7	9.2
2	10.9	16.8	16.8	21.7	12.0
3	6.5	16.3	3.8	1.6	1.1
4	3.3	2.2	1.6	2.2	0.5
5	6.0	14.1	4.3	3.8	0.0
6	16.3	6.0	7.1	2.2	1.1
7	35.3	7.1	19.0	9.8	2.2

PROBLÈME 1

Cette question a été bien réussie. 47 étudiants ont reçu 6 ou 7 points et seulement 6 étudiants n'ont reçu aucun point. Plusieurs étudiants ont présenté une solution semblable à celle de David Arthur. Une autre approche a été de trouver des bornes pour a, ($0 \leq a < 60$ ou alors $0 \leq a < 90$), pour ensuite tenter de montre lesquelles de ces valeurs sont satisfaites par l'équation.

PROBLÈME 2

Bien que la plupart des étudiants se sont essayés sur ce problème, il n'y avait finalement que 6 solutions parfaites. 6 autres solutions ont remporté 6 des 7 points, et 13 ont remporté 5 points.

L'approche la plus commune a été de calculer le carré des deux côtés de l'équation, puis d'arranger les termes pour isoler le radical, et calculer le carré encore une fois. On obtenait alors le polynôme $x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 = 0$. Malheureusement, il était alors difficile de factoriser ce polynôme, et plusieurs n'ont remporté que 2 ou 3 points.

Le polynôme possède en vérité trois racines distinctes: 0, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Bien des étudiants ont reconnu que 0 n'est pas nécessaire, mais on a retiré un point pour ne pas réaliser que $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ n'est de même pas nécessaire, et un autre point a été déduit si on a oublié de vérifier que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une solution. (Car il n'est pas évident du tout que l'équation possède une solution). L'oubli de vérifier les racines non-essentielles est considéré comme une erreur majeure, et les correcteurs auraient peut-être dû déduire plus de points pour cette omission.

La solution inclue ici évite le polynôme du sixième degré, contournant le problème de factorisation.

Néanmoins, les solutions doivent être vérifiées.

PROBLÈME 3

On a reçu 17 solutions parfaites pour ce problème, et 11 autres solutions ont remporté 5 ou 6 points.

La solution la plus élégante emploie deux observations simples: le fait que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ en plus que $\frac{1}{2}$ soit supérieur à la moyenne de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\ldots$, $\frac{1}{2n}$.

Un argument autour d'une somme télescopique fonctionne aussi bien, en ajoutant les premiers et derniers termes de chaque côté, et ainsi de suite. La clé d'une solution réussie par récurrence est de rester vigilant avec l'algèbre et d'éviter surtout la tentation d'utiliser les inégalités. Par exemple, plusieurs étudiants ont utilisé la récurrence pour déduire que

$$\frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right) > \frac{n+1}{(n+2)n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{(n+2)(2n+1)}$$

pour ensuite utiliser $\frac{n+1}{(n+2)n} > \frac{1}{n+1}$, qui s'avère trop faible pour réussir la démonstration.

PROBLÈME 4

Plusieurs étudiants ont attaqué ce problème, mais peu se sont rendus plus loin qu'un étiquetage des angles les plus apparents. Neuf étudiants ont complété ce problème avec succès, et six autres en ont accompli une partie significative.

La plupart de ces efforts se sont servis de la trigonométrie ou de coordonnées pour établir une équation sur un angle inconnu, ce qui emmène une attaque sur les identités. Adrian Birka a produit une solution très claire de cette façon. Seulement Keon Choi a réussi à produire une (très élégante) solution synthétique. Un autre concurrent a aussi fait de bon progrès avec la même idée.

PROBLÈME 5

Beaucoup d'étudiants ont réussi à trouver une expression pour les termes de la suite $\{a_n\}$ par une variété de méthodes: une formulation explicite, utilisation d'une fonction génératrice, ou alors une somme de coefficients du binôme comprenant un paramètre m. Ces méthodes ne s'avèrent malheureusement pas suffisantes pour résoudre le problème. Dix-sept concurrents ont néanmoins réussi à montrer par récurrence que les termes de la suite satisfont la relation requise.

Pour démontrer la partie “seulement si”, il fallait utiliser la méthode de la descente qui techniquement comporte le même calcul que la partie directe. Trois étudiants y ont réussi, mais seulement deux ont obtenu une solution complète en montrant que le suite ainsi construite par la méthode de la descente est décroissante et doit comporter m et 0 en tant que derniers termes.