1997 OMC

Problème 1 – Deepee Khosla, Lisgar Collegiate Institute, Ottawa, ON

Dénotons par $p_1, \ldots, p_{12}$, en ordre croissant, les nombres premiers de 7 à 47. Alors

$$5! = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot p_1^0 \cdot p_2^0 \ldots p_{12}^0$$

et

$$50! = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \ldots p_{12}^{b_{12}}.$$

Remarquons que $2^4, 3^2, 5^2, p_1, \ldots, p_{12}$ divisent tous 50!, et donc toutes ses puissances premières diffèrent de celles de 5!

Puisque maintenant $x, y | 50!$, ils doivent être de la forme

$$\begin{aligned} x &= 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \ldots p_{12}^{n_{15}} \\ y &= 2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdot \ldots p_{12}^{m_{15}}. \end{aligned}$$

Donc $\max(n_i, m_i)$ est la i^{ème} puissance première dans 50!
et de même $\min(n_i, m_i)$ est la i^{ème} puissance première dans 5!

Ainsi, par la remarque ci-haute, les puissances premières dans p_{12} et moins diffèrent dans 5! et 50!, on trouve 2^{15} choix pour x, seulement la moitié desquelles seront moins que y. (Puisque pour chaque choix de x, y est déterminé et ou bien $x < y$ ou alors $y < x$.) Le nombre de pairs est donc $2^{15}/2 = 2^{14}$.

Problème 2 – Byung Kuy Chun, Harry Ainlay Composite High School, Edmonton, AB

Remarquons que le premier point de chaque intervalle unitaire détermine uniquement l'intervalle donné.

Lemme. Dans tout intervalle $[x, x+1)$, on doit trouver au moins un de ces premiers points ($0 \leq x \leq 49$).

Démonstration. Supposons le contraire. Le dernier de ces premiers points avant $x$doit être de la forme $x - \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ quelconque. L'intervalle unitaire correspondant se termine à $x - \varepsilon + 1 < x + 1$. Pourtant, le prochain intervalle unitaire donné ne peut commencer avant au moins $x + 1$.

Ceci implique que les points $(x - \varepsilon + 1,\ x + 1)$ ne se trouvent pas dans l'ensemble A, une contradiction.

$\therefore$ Il y a donc un premier point dans $[x,\ x+1)$. $\square$

Remarquons maintenant que pour deux premiers points dans les intervalles $[x, x+1)$ et $[x+2, x+3)$ respectivement, les intervalles unitaires correspondants sont disjoints puisque les intervalles sont compris dans $[x, x+2)$ et $[x+2, x+4)$ respectivement.

$\therefore$ On peut donc choisir un intervalle unitaire qui débute dans chacun de

$$[0, 1)[2, 3) \ldots [2k, 2k+1) \ldots [48, 49).$$

Comme il y a bien entendu 25 de ces intervalles, on trouve 25 points qui correspondent à 25 intervalles unitaires disjoints.

Problème 2 – Colin Percival, Burnaby Central Secondary School, Burnaby, BC

Nous montrons le résultat plus général suivant, c'est-à-dire que si $[0, 2n] = \bigcup_i A_i, |A_i| = 1, A_i$ sont des intervalles alors $\exists a_1 \dots a_n$, de sorte que $A_{a_i} \bigcap A_{a_j} = \emptyset$.

Soit $0 < \varepsilon \leq \dfrac{2}{n-1}$ et soit de plus $b_i = (i-1)(2+\varepsilon), i = 1 \dots n$. Alors

$$\min\{b_i\} = 0, \max\{b_i\} = (n-1)(2+\varepsilon) \leq (n-1)\left(2 + \frac{2}{n-1}\right) = (n-1)\left(\frac{2n}{n-1}\right) = 2n.$$

Donc tous les b_i se retrouvent dans $[0, 2n]$.

Soit maintenant a_i tel que $b_i \in A_{a_i}$. Puisque $\bigcup A_i = [0, 2n]$, ceci est donc possible.

Alors puisque $(b_i - b_j) = (i-j)(2+\varepsilon) \geq 2 + \varepsilon > 2$, et que les A_i sont des intervalles de longueur 1, $\min A_{a_i} - \max A_{a_j} > 2 - 1 - 1 = 0$, alors $A_{a_i} \bigcap A_{a_j} = \emptyset$.

En substituant $n = 25$, nous obtenons le résultat désiré. Q.E.D.

Problème 3 – Mihaela Enachescu, Dawson College, Montréal, PQ

Soit $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{1997}{1998}$. Alors $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ puisque $2 < 3$, $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$ puisque $4 < 5, \ldots,$

$\ldots \frac{1997}{1998} > \frac{1997}{1999}$ puisque $1998 < 1999$.

Donc

$$P > \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{1997}{1999} = \frac{1}{1999} \quad . \qquad (1)$$

De plus, $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ puisque $1 \cdot 3 < 2 \cdot 2$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ puisque $3 \cdot 5 < 4 \cdot 4, \ldots$

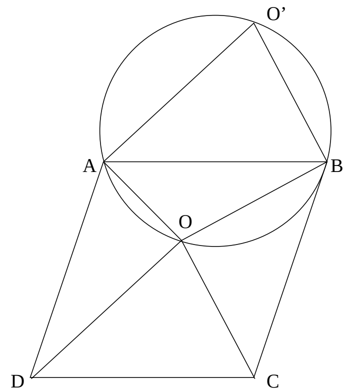
$\frac{1997}{1998} < \frac{1998}{1999}$ puisque $1997 \cdot 1999 = 1998^2 - 1 < 1998^2$.

Donc $P < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{1998}{1999} = \underbrace{\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{1998}{1997}\right)}_{\frac{1}{P}} \frac{1}{1999}$.

Ainsi $P^2 < \frac{1}{1999} < \frac{1}{1936} = \frac{1}{44^2}$ et $P < \frac{1}{44}$. $\qquad$ (2)

Finalement, (1) et (2) donnent $\frac{1}{1999} < P < \frac{1}{44}$ (q.e.d.)

Problème 4 – Joel Kamnitzer, Earl Haig Secondary School, North York, ON



Considérons une translation qui transforme D en A. Elle transformera aussi $0 \to 0'$ de sorte que $\overline{OO'} = \overline{DA}$, et C se transformera en B puisque $\overline{CB} = \overline{DA}$.

La translation préserve les angles, et donc $\angle AO'B = \angle DOC = 180° - \angle AOB$.

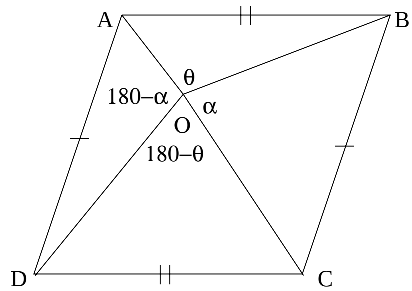
$\therefore AOBO'$ forme un quadrilatère cyclique.

$\therefore \angle ODC = \angle O'AB = \angle O'OB$

mais, comme $O'O$ est parallèle à BC,

$$\begin{aligned} \angle O'OB &= \angle OBC \\ \therefore \angle ODC &= \angle OBC. \end{aligned}$$

Problème 4 – Adrian Chan, Upper Canada College, Toronto, ON



Soient $\angle AOB = \theta$ et $\angle BOC = \alpha$. Alors $\angle COD = 180° - \theta$ et $\angle AOD = 180° - \alpha$.

Puisque $AB = CD$ (parallélogramme) et $\sin\theta = \sin(180° - \theta)$, la loi des sinus sur $\triangle OCD$ et $\triangle OAB$ donne

$$\frac{\sin \angle CDO}{OC} = \frac{\sin(180° - \theta)}{CD} = \frac{\sin\theta}{AB} = \frac{\sin \angle ABO}{OA}$$

donc

$$\frac{OA}{OC} = \frac{\sin \angle ABO}{\sin \angle CDO}. \tag{1}$$

De même, la loi des sinus sur $\triangle OBC$ et $\triangle OAD$ donne

$$\frac{\sin \angle CBO}{OC} = \frac{\sin\alpha}{BC} = \frac{\sin(180° - \alpha)}{AD} = \frac{\sin \angle ADO}{OA}$$

donc

$$\frac{OA}{OC} = \frac{\sin \angle ADO}{\sin \angle CBO}. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) montrent que $\sin \angle ABO \cdot \sin \angle CBO = \sin \angle ADO \cdot \sin \angle CDO$, et ainsi

$$\frac{1}{2}[\cos(\angle ABO + \angle CBO) - \cos(\angle ABO - \angle CBO)] = \frac{1}{2}[\cos(\angle ADO + \angle CDO) - \cos(\angle ADO - \angle CDO)].$$

Comme $\angle ADC = \angle ABC$(parallélogramme) et $\angle ADO + \angle CDO = \angle ADC$ et $\angle ABO + \angle CBO = \angle ABC$, il s'en suit que $\cos(\angle ABO - \angle CBO) = \cos(\angle ADO - \angle CDO)$.

On trouve deux cas à considérer.

Cas (i): $\angle ABO - \angle CBO = \angle ADO - \angle CDO$.

Comme $\angle ABO + \angle CBO = \angle ADO + \angle CDO$, on obtient en soustrayant $2\ \angle CBO = 2\ \angle CDO$ donc $\angle CBO = \angle CDO$, et le fait est accompli.

Cas (ii): $\angle ABO - \angle CBO = \angle CDO - \angle ADO$.

Comme nous savons que $\angle ABO + \angle CBO = \angle CDO + \angle ADO$, on obtient en additionnant $2\ \angle ABO = 2\ \angle CDO$, et donc $\angle ABO = \angle CDO$ and $\angle CBO = \angle ADO$.

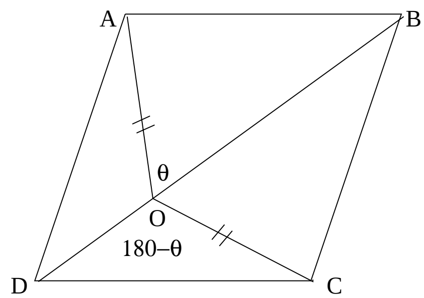
En remplaçant tout ceci dans (1), il s'en suit que $OA = OC$.

De plus, $\angle ADO + \angle ABO = \angle CBO + \angle ABO = \angle ABC$.

Maintenant, $\angle ABC = 180° - \angle BAD$ puisque $ABCD$ forme un parallélogramme.

Donc $\angle BAD + \angle ADO + \angle ABO = 180°$, et donc $\angle DOB = 180°$ et D, O, B sont colinéaires.

Nous obtenons ainsi le diagramme



Alors $\angle COD + \angle BOC = 180°$, so $\angle BOC = \theta = \angle AOB$.

$\triangle AOB$ est semblable au $\triangle COB$ (SAS, OB est commun, $\angle AOB = \angle COB$ et $AO = CO$), ainsi $\angle ABO = \angle CBO$. Puisque de plus $\angle ABO = \angle CDO$, on en déduit que $\angle CBO = \angle CDO$.

Comme l'hypothèse est vérifiée dans tous les cas, $\angle CBO = \angle CDO$. Q.E.D.

Problème 5 – Sabin Cautis, Earl Haig Secondary School, North York, ON

Nous remarquons d'abord que

$$k^3 + 9k^2 + 26k + 24 = (k+2)(k+3)(k+4).$$

Soit maintenant $S(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{k^2 + 9k^2 + 26k + 24}$.

Alors

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!(k+2)(k+3)(k+4)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^k (n+4)!}{(k+4)!(n-k)!} \right) \times \left(\frac{k+1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \right). \end{aligned}$$

Soit de plus

$$T(n) = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)S(n) = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k \begin{pmatrix} n+4 \\ k+4 \end{pmatrix} (k+1) \right).$$

Ainsi, pour $n \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

puisque

$$(1-1)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \ldots + (-1)^n \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} i &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{i \cdot n!}{i! \cdot (n-i)!} + (-1)^0 \cdot \frac{0 \cdot n!}{0! \cdot n!} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i n \begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix} \\ &= n \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix} \\ &= -n \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En substituant $j = i - 1$, (*) montre que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i = -n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} = 0. \qquad (**)$$

Donc

$$\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+4}{k+4} (k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+4} \binom{n+4}{k+4} (k+1) \\
&= \sum_{k=-4}^{n} (-1)^{k+4} \binom{n+4}{k+4} (k+1) - \left(-3 + 2(n+4) - \binom{n+4}{2} \right).
\end{aligned}$$

Substituant $j = k + 4$,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n+4} (-1)^j \binom{n+4}{j} (j-3) - \left(2n + 8 - 3 - \frac{(n+4)(n+3)}{2} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n+4} (-1)^j \binom{n+4}{j} j - 3 \sum_{j=0}^{n+4} (-1)^j \binom{n+4}{j} - \frac{1}{2}(4n + 10 - n^2 - 7n - 12)
\end{aligned}$$

De (*) et (**), on déduit que les deux premiers termes sont nuls, et

$$T(n) = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
S(n) &= \frac{T(n)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{n^2 + 3n + 2}{2(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{1}{2(n+3)(n+4)}.
\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k^3 + 9k^2 + 26k + 24} = \frac{1}{2(n+3)(n+4)}$$