SOLUTIONS

QUESTION 1

Solution

Remarquons d'abord que

$$f(1-x) = \frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3} = \frac{9}{9+3\times 9^x} = \frac{3}{9^x+3},$$

d'où on obtient

$$f(x)+f(1-x) = \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{3}{9^x+3} = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{1995} f\left(\frac{k}{1996}\right) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{997}\left[f\left(\frac{k}{1996}\right) + f\left(\frac{1996-k}{1996}\right)\right] + f\left(\frac{998}{1996}\right) && (1)\\
&\quad = \sum_{k=1}^{997}\left[f\left(\frac{k}{1996}\right) + f\left(1-\frac{k}{1996}\right)\right] + f\left(\frac{1}{2}\right) && (2)\\
&\quad = 997 + \frac{3}{3+3} = 997\frac{1}{2}. && (3)
\end{aligned}$$

QUESTION 2

Solution 1.

On démontre l'inégalité équivalente $a^{3a}b^{3b}c^{3c} \geq (abc)^{a+b+c}$. Par symétrie, on peut supposer que $a \geq b \geq c$. Donc $a-b \geq 0$, $b-c \geq 0$, $a-c \geq 0$ et $\frac{a}{b} \geq 1$, $\frac{b}{c} \geq 1$, $\frac{a}{c} \geq 1$. On aura donc

$$\frac{a^{3a}b^{3b}c^{3c}}{(abc)^{a+b+c}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c} \geq 1.$$

Solution 2.

Si on assigne les poids a, b, c respectivement aux nombres a, b, c, alors l'inégalité géométrique et harmonique moyenne pesée, suivie de l'inégalité arithmétique et géométrique moyenne, nous donnent

$$\sqrt[a+b+c]{a^a b^b c^c} \geq \frac{a+b+c}{\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}} = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

d'où $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$ découle facilement.

QUESTION 3

Solution

Pour faciliter la démonstration, appelons l'angle intérieur supérieur à 180° d'un tel boumerang un angle "réflexe".

Bien sûr, on trouve b angles réflexes, chacun se trouvant dans un boumerang différent et chacun dont le sommet correspondant se trouve à l'intérieur de C. Les angles autour de ces sommets totalisent $2b\pi$. D'autre part, la somme des angles intérieurs de C est $(s-2)\pi$ et la somme des angles intérieurs de tous les q quadrilatères est $2\pi q$.

Ainsi, $2\pi q \geq 2b\pi + (s-2)\pi$ d'où l'on obtient $q \geq b + \frac{s-2}{2}$.

QUESTION 4

Solution 1.

Comme $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, on aurra donc pour $k = 0$ la solution $(x_1, x_2, \cdots, x_n; y) = \left(1, 2, \cdots, n; \frac{n(n+1)}{2}\right)$. Pour montrer qu'il existe généralement une infinité de solutions, posons $c = \frac{n(n+1)}{2}$ et remarquons que pour tout entier positif q, on a:

$$\begin{aligned}
&(c^k q^{3k+2})^3 + (2c^k q^{3k+2})^3 + \cdots + (nc^k q^{3k+2})^3 \\
&\quad = c^{3k} q^{3(3k+2)} (1^3 + 2^3 + \cdots n^3) \\
&\quad = c^{3k} q^{3(3k+2)} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&\quad = c^{3k+2} q^{3(3k+2)} = (cq^3)^{3k+2}.
\end{aligned}$$

Ansi, $(x_1, x_2, \cdots, x_n; y) = (c^k q^{3k+2}, 2c^k q^{3k+2}, \cdots, nc^k q^{3k+2}; cq^3)$ est toujours une solution, ce qui complète la démonstration.

Solution 2.

Pour tout entier positif q, prenons $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = n^{2k+1} q^{3k+2}$, $y = n^2 q^3$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = n \cdot n^{6k+3} \cdot q^{9k+6} = (n^2 q^3)^{3k+2} = y^{3k+2}.$$

Solution 3.

Si $n = 1$, prenons $x_1 = q^{3k+2}, y = q^3$ comme dans la solution 2. Pour $n > 1$, on cherche des solutions de la forme

$$x_1 = x_2 = \cdots x_n = n^p, \;\; y = n^q.$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = y^{3k+2} \Leftrightarrow n^{3p+1} = n^{(3k+2)q} \Leftrightarrow 3p + 1 = (3k+2)q \Leftrightarrow (3k+2)q - 3p = 1.$$

Cette dernière égalité est vérifiée si l'on considère

$$q = 3t + 2 \text{ et } p = (3k+2)t + (2k+1) \text{ où } t$$

est un entier non négatif quelconque. On retrouve donc une infinité de solutions positives et entières données par

$$x_1 = x_2 = \cdots x_n = n^{(3k+2)t+(2k+1)}, \;\; y = n^{3t+2}.$$

QUESTION 5

Solution

Remarquons d'abord que $u_1 = 1 - u$. Puisque $u \leq x$ et $1 - x \leq 1 - u$ pour tout $x \in [u, 1]$, on obtient

$$\begin{aligned}1 - &\left(\sqrt{ux} + \sqrt{(1-u)(1-x)}\right)^2 \\ &= 1 - ux - (1-u)(1-x) - 2\sqrt{ux(1-u)(1-x)} \\ &= u + x - 2ux - 2\sqrt{ux(1-u)(1-x)} \\ &\leq u + x - 2ux - 2u(1-x) = x - u.\end{aligned}$$

Donc,

$$f(x) = 0 \text{ si } 0 \leq x \leq u \tag{1}$$

et

$$f(x) \leq x - u \text{ si } u \leq x \leq 1. \tag{2}$$

De (2) l'on obtient $u_2 = f(u_1) \leq u_1 - u = 1 - 2u$ si $u_1 \geq u$. Une récurrence facile donne alors

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n - u \leq 1 - (n+1)u \text{ si } u_i \geq u \text{ pour tout } i = 1, 2, \cdots, n.$$

Donc pout tout k suffisamment grand, on doit nécessairement avoir $u_{k-1} < u$ et ainsi (1) nous donne finalement $u_k = f(u_{k-1}) = 0$.