Olympiade mathématique du Canada 2020

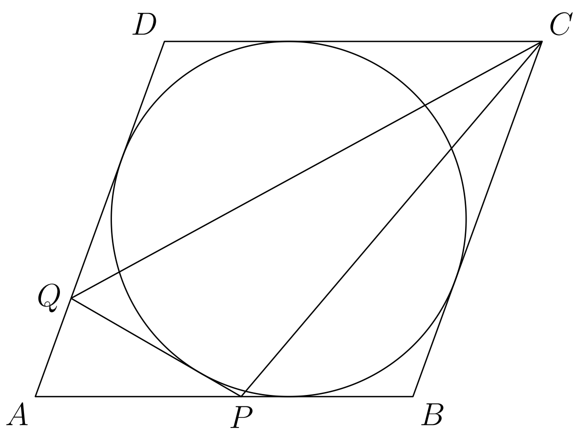
Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

Vous trouverez la liste complète de nos commanditaires et partenaires du concours en ligne, à l'adresse suivante : https://smc.math.ca/Concours/Commanditaires/

Examen officiel

1. Soit S un ensemble composé de $n \geq 3$ nombres réels positifs. Montrer qu'il existe au plus $n-2$ nombres qui sont à la fois des puissances entières de trois et qui s'écrivent comme la somme de trois éléments de S.

2. Un cercle est inscrit dans un losange $ABCD$. Les points P et Q varient sur les segments $\overline{AB}$ et $\overline{AD}$, respectivement, de sorte que le segment $\overline{PQ}$ est tangent au cercle. Montrer que pour tout segment $\overline{PQ}$, l'aire du triangle CPQ est constante.



3. Une bourse contient un nombre fini de pièces de monnaie. Chaque pièce a une valeur entière différente de celle des autres pièces. Est-il possible qu'il y ait exactement 2020 façons de choisir des pièces de cette bourse afin d'avoir la valeur de 2020 ?

4. Soit $S = \{1, 4, 8, 9, 16, \ldots\}$, l'ensemble de toutes les puissances entières d'un entier, c'est-à-dire les nombres de la forme n^k où n, k sont des entiers positifs et $k \geq 2$. On écrit $S = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\}$ avec ses éléments en ordre croissant tel que $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers m tel que 9999 divise la différence $a_{m+1} - a_m$.

5. Il y a 19998 personnes sur un certain réseau social et chaque paire d'individus peut être ou non une paire d'*amis*. Pour tout groupe de 9999 personnes, il y a au moins 9999 paires d'entre eux qui sont amis. Quel est le plus petit nombre d'amitiés sur le réseau, c'est-à-dire, le nombre minimal de paires de personnes qui sont amis, qu'il doit y avoir parmi les 19998 pêrsonnes ?

Important !

Prière de ne pas discuter du contenu de l'examen en ligne d'ici 24 heures.