ÉLÈVE :
Reference Copy

ÉCOLE :
Canada Way H.S., Ottawa

CODE ID POUR L'ÉPREUVE : **10101**

Olympiade mathématique du Canada
2018
Livret officiel de l'épreuve

Consignes à l'élève

SEULS INSTRUMENTS AUTORISÉS : CRAYONS, STYLOS, GOMMES À EFFACER, LIQUIDE CORRECTEUR, RÈGLE ET COMPAS. AUCUN AUTRE MOYEN N'EST ADMIS.

1. Vérifiez l'exactitude de votre nom et du nom de l'école, inscrits en haut de cette page.
1. Vous ne pouvez pas poser de question sur l'épreuve. Si vous n'êtes pas certain de comprendre le problème, écrivez-le, puis écrivez la réponse ou la solution qui vous paraît être l'interprétation valide la plus probable.
2. L'épreuve comprend 5 questions. Toutes les questions sont de valeur égale. Des notes partielles pourront être attribuées. Chaque solution doit être expliquée, et doit être claire, concise et complète, puisque la présentation compte. Des points ou des primes seront attribués pour une solution élégante ou une généralisation valide d'un problème particulier.
3. Toutes les réponses doivent être écrites dans ce livret, au stylo ou au crayon, sur un côté de la feuille seulement. L'autre côté est réservé aux brouillons. Vous pouvez ajouter des feuilles si vous manquez de place pour écrire votre réponse à une question. Assurez-vous alors d'indiquer le numéro de la question et votre numéro d'identification sur chaque page supplémentaire. N'écrivez pas votre nom.
4. À la fin de l'épreuve, la surveillante ou le surveillant signera la déclaration ci-dessous et enverra les cahiers à la correction. Vous devez retirer la dernière page du livret et la conserver. Elle indique le code d'identification exclusif qui vous permettra de consulter vos résultats plus tard.
5. Prière de ne pas discuter du contenu de l'examen en ligne d'ici 24 heures.

Déclaration de la surveillante ou du surveillant

Je confirme l'identité de l'élève dont le nom figure ci-dessus. Je me suis assuré que l'élève a fait l'épreuve sans l'aide d'aucune source, quelle qu'elle soit, le 28 mars 2018, pendant la période officiellement prévue. Je déclare ne pas avoir de lien de parenté avec l'élève.

Nom de la surveillante ou du surveillant
(caractères d'imprimerie)

Signature

L'épreuve ne peut être validée sans la déclaration signée de la surveillante ou du surveillant.

Présenté par la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

DO NOT WRITE ON THIS PAGE	
1	2
3	4
5	TOTAL

1. Des jetons sont positionnés dans le plan, pas nécessairement en des positions distinctes. On peut effectuer des mouvements de la façon suivante : on sélectionne deux jetons A et B et on les déplace au point milieu de A et B.

   On dit qu'un arrangement de n jetons est *compressible* s'il est possible d'en arriver à avoir les n jetons de l'arrangement en un même point après un nombre fini de mouvements. Démontrez qu'un arrangement de n jetons est compressible si et seulement si n est une puissance de 2.

3. Deux entiers positifs a et b sont *reliés par un nombre premier* si $a = pb$ ou $b = pa$ pour un nombre premier p. Déterminez tous les entiers positifs n tels que n a au moins 3 diviseurs et que tous ses diviseurs peuvent être arrangés sans répétition sur un cercle de façon à ce que deux diviseurs adjacents soient dits reliés par un nombre premier.

   Notez que 1 et n sont toujours des diviseurs de n.

2. Cinq points d'un cercle sont étiquetés par les lettres A, B, C, D et E dans le sens des aiguilles d'une montre. Supposons que $AE = DE$ et posons P l'intersection de AC et BD. Soit Q le point de la droite passant par A et B tel que A est entre B et Q et que $AQ = DP$. De la même façon, soit R le point de la droite passant par C et D tel que D est entre C et R et que $DR = AP$. Démontrez que PE est perpendiculaire à QR.

3. Deux entiers positifs a et b sont *reliés par un nombre premier* si $a = pb$ ou $b = pa$ pour un nombre premier p. Déterminez tous les entiers positifs n tels que n a au moins 3 diviseurs et que tous ses diviseurs peuvent être arrangés sans répétition sur un cercle de façon à ce que deux diviseurs adjacents soient dits reliés par un nombre premier.

   Notez que 1 et n sont toujours des diviseurs de n.

4. Déterminez tous les polynômes $p(x)$ à coefficients réels qui ont la propriété suivante : il existe un polynôme $q(x)$ à coefficients réels tel que

$$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n) = p(n)q(n)$$

pour tous les entiers strictement positifs n.

5. Soit k un entier pair strictement positif donné. Sarah débute en choisissant un entier N supérieur à 1 et le modifie ensuite de la façon suivante : chaque minute, elle choisit un diviseur premier p de N puis multiplie N par $p^k - p^{-1}$ pour produire la nouvelle valeur de N. Démontrez qu'il y a une infinité de nombres entiers pairs strictement positifs k tels que, peu importe les choix faits par Sarah, le nombre N sera à un certain point divisible par 2018.

Canada Way H.S., Ottawa

Merci, Reference Copy, de participer à l'Olympiade mathématique du Canada (OMC) cette année. **Votre code d'identification pour l'épreuve est 10101.** Vous aurez besoin de ce code pour consulter vos résultats en ligne. Nous vous enverrons un courriel à l'adresse studentemail@cms.math.ca quand les résultats seront prêts.

Les résultats de l'OMC seront affichés à l'adresse **https://omc.math.ca/**.