2015 Olympiades mathématiques canadiennes
[version du 28 janvier 2015]

Notation: Si V et W sont deux points, alors VW dénote le segment de droite ayant pour extrémités V et W ainsi que la longueur de ce segment.

1. Soit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Trouvez toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{N}$ et prenant des valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit ABC un triangle aigu avec ses hauteurs AD, BE et CF. Soit H, l'orthocentre du triangle (le point de rencontre des hauteurs). Montrez que
$$\frac{AB \cdot AC + BC \cdot BA + CA \cdot CB}{AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF} \leq 2\,.$$

3. Sur une grille carrée $(4n+2) \times (4n+2)$, une tortue se déplace entre les cases qui partagent un côté. La tortue débute dans un coin de la grille et visite chaque case exactement une fois avant de revenir à son point de départ. En fonction de n, quel est le plus grand entier positif k tel qu'il doit y avoir une rangée ou une colonne dans laquelle la tortue est entrée à au moins k reprises?

4. Soit ABC un triangle aigu dont le centre du cercle circonscrit est O. Soit Γ un cercle dont le centre se trouve sur la hauteur issue de A dans ABC et qui passe par le sommet A ainsi que par les points P et Q sur les côtés AB et AC. Supposons que $BP \cdot CQ = AP \cdot AQ$. Montrez que Γ est tangent au cercle circonscrit du triangle BOC.

5. Soit p un nombre premier pour lequel $\frac{p-1}{2}$ est aussi premier et posons a, b, c des entiers qui ne sont pas divisibles par p. Montrez qu'il y a au plus $1 + \sqrt{2p}$ entiers strictement positifs n tels que $n < p$ et que p divise $a^n + b^n + c^n$.