Financière Sun Life

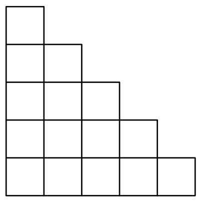
42$^{\text{e}}$ **Olympiade mathématique du Canada**

Mercredi le 24 mars, 2010

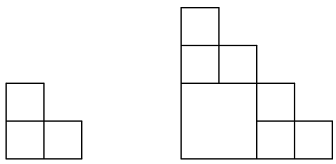
CMS
SMC

---

(1) Pour un nombre entier positif n, un n-*escalier* est une figure composée de carrés unitaires, avec un carré dans la première rangée, deux carrés dans la deuxième rangée, et ainsi de suite, jusqu'à n carrés dans la $n$ième rangée, où les carrés les plus à gauche dans chaque rangée sont alignés verticalement. Par exemple, le 5-escalier est illustré ci-dessous.



Soit $f(n)$ le nombre minimal de tuiles carrées requises pour couvrir un n-escalier, où les longueurs des côtés des tuiles carrées peuvent être n'importe quel nombre entier positif. Par exemple, $f(2) = 3$ et $f(4) = 7$.



(a) Trouver tous les n tel que $f(n) = n$.
(b) Trouver tous les n tel que $f(n) = n + 1$.

(2) Soit A, B, P trois points sur un cercle. Montrez que si a et b sont les distances de P aux tangentes à A et B et si c est la distance de P à la corde AB, alors $c^2 = ab$.

(3) Trois patineurs de vitesse participent à une course amicale sur un anneau de glace. Ils partent du même point et patinent dans la même direction, mais à des vitesses différentes qu'ils maintiennent tout au long de la course. Le plus lent patine 1 tour de piste par minute, le plus rapide patine 3,14 tours de piste par minute, et celui du milieu patine L tours de piste par minute où $1 < L < 3{,}14$. La course se termine au moment où les trois patineurs sont à nouveau ensemble au même point sur l'anneau de glace (qui peut être différent du point de départ.) Déterminer le nombre de différentes valeurs possibles de L pour lesquelles exactement 117 dépassements surviennent avant la fin de la course. (Un dépassement est réalisé quand un patineur dépasse un autre. Le début et la fin de la course lorsque les trois patineurs sont ensemble ne sont pas comptés comme des dépassements.)

(4) Les sommets d'un graphe fini peuvent être coloriés, soit en noir ou en blanc. Au départ, tous les sommets sont noirs. Il est permis de choisir un sommet P et de changer la couleur de P et de l'ensemble de ses voisins. Est-il possible de changer la couleur de tous les sommets de noir à blanc avec une suite d'opérations de ce type?

(Un graphe fini se compose d'un ensemble fini de sommets et d'un ensemble fini d'arêtes entre les sommets. S'il y a une arête entre le sommet A et le sommet B, alors B est dit un voisin de A.)

(5) Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes à coefficients entiers et soit $a_n = n! + n$. Montrer que si $P(a_n)/Q(a_n)$ est un entier pour tout n, alors $P(n)/Q(n)$ est un entier pour tout entier n tel que $Q(n) \neq 0$.