PROBLÈMES

PROBLÈME 1. Étant donné une grille $m \times n$ de carrés colorés en noir ou blanc, nous disons qu'un carré noir est *bloqué* s'il y a un carré blanc à sa gauche dans la même rangée et il y a un carré blanc au-dessus de ce carré noir dans la même colonne (voir la Figure 1).

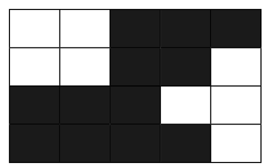

FIGURE 1. Une grille 4×5 sans carré noir bloqué

Trouver une expression analytique pour le nombre de grille $2 \times n$ sans carré noir bloqué.

PROBLÈME 2. Découpez deux cercles en carton de différents rayons. Chaque cercle est subdivisé en 200 secteurs égaux. Sur chaque cercle 100 secteurs sont peints en blanc et les autres 100 secteurs sont peints en noir. Le plus petit cercle est placé sur le plus grand cercle, de sorte que leurs centres coïncident. Démontrez qu'on peut pivoter le petit cercle afin que les secteurs sur les deux cercles s'alignent et qu'au moins 100 secteurs sur le petit cercle se trouvent au-dessus des secteurs de la même couleur sur le grand cercle.

PROBLÈME 3. Soit
$$f(x,y,z) = \frac{(xy+yz+zx)(x+y+z)}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$
Déterminer l'ensemble des nombres réels r pour lesquels il existe un triplet (x,y,z) de nombres réels positifs tels que $f(x,y,z) = r$.

PROBLÈME 4. Trouver toutes les paires ordonées (a,b) où a et b sont des entiers et $3^a + 7^b$ est un carré parfait.

PROBLÈME 5. On marque un ensemble de points dans le plan, avec la propriété que n'importe quels trois points marqués peuvent être couverts par un disque de rayon 1. Montrer que l'ensemble de tous les points marqués peut être couvert par un disque de rayon 1.