40e Olympiade mathmatique du Canada

Mercredi le 26 mars, 2008

---

1. ABCD est un quadrilatère convexe dans lequel AB est le côté le plus long. Les points M et N sont situés sur les côtés AB et BC respectivement, de sorte que chacun des segments AN et CM divise le quadrilatère en deux parties de même aire. Montrez que le segment MN coupe la diagonale BD en deux parties égales.

2. Déterminer toutes les fonctions f définies sur l'ensemble des nombres rationnels et qui prennent des valeurs rationnelles telles que
$$f(2f(x)+f(y)) = 2x + y \ ,$$
pour tous les nombres rationnels x et y.

3. Soit a, b et c trois nombres réels positifs tels que $a+b+c=1$. Montrer que
$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2} \ .$$

4. Déterminer toutes les fonctions f définies sur l'ensemble des entiers naturels et qui prennent des valeurs dans l'ensemble des entiers naturels telles que
$$(f(n))^p \equiv n \mod f(p)$$
pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout nombre premier p.

5. Une *Marche autoévitante d'une tour* sur un échiquier (une grille rectangulaire formée de carrés unitaires) est un chemin tracé par une suite de mouvements parallèles à un bord de l'échiquier partant d'un carré unitaire à un autre de sorte que chacun de ces mouvements commence où le mouvement précédent a terminé et qu'aucun mouvement ne croise un carré qui a été précédemment croisé, *c'est-à-dire* le chemin de la tour ne se croise pas.

   Soit $R(m,n)$ le nombre de Marches autoévitantes d'une tour sur un échiquier $m \times n$ (m lignes, n colonnes) qui commencent au coin inférieur gauche et se terminent au coin supérieur gauche. Par exemple, $R(m,1)=1$ pour tout entier naturel m; $R(2,2)=2$; $R(3,2)=4$; $R(3,3)=11$. Trouver une formule pour $R(3,n)$ pour chaque entier naturel n.