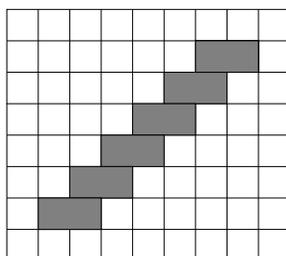


39e Olympiade mathématique du Canada

Mercredi le 28 mars 2007



1. Quel est le nombre maximum de dominos 2×1 qui peuvent être placés sur un damier 8×9 si six d'entre eux sont placés comme illustré dans le digramme ci-dessous ? (les dominos ne doivent pas se chevaucher). Chaque domino doit être placé horizontalement ou verticalement afin de couvrir deux places adjacentes du damier.



2. Soit deux triangles qui satisfont aux conditions suivantes:

- (a) deux des côtés d'un des triangles sont égaux (en longueur) à deux des côtés de l'autre triangle, et
- (b) les triangles sont semblables, mais pas nécessairement congruents.

Montrer que le rapport des côtés qui sont liés par la similarité est un nombre entre $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ et $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

3. Supposer que f est une fonction à valeurs réelles qui satisfait

$$f(xy) + f(y - x) \geq f(y + x)$$

pour tous nombres réels x et y .

- (a) Donner un polynôme non constant qui satisfait cette condition.
- (b) Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout nombre réel x .

4. Si a et b sont deux nombres réels tels que $ab \neq 1$, on définit l'opération $*$ par

$$a * b = \frac{a + b - 2ab}{1 - ab}.$$

Commencer par une liste de $n \geq 2$. Pour chaque choix de deux nombres a et b dans la liste, on enlève les deux nombres et on place le nombre $a * b$ à la fin de la liste réduisant ainsi sa longueur par un. Répéter le processus jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul élément dans la liste.

- (a) Démontrer que le dernier élément qui reste est toujours le même indépendamment du choix de la paire des nombres à chaque étape.
- (b) Supposer maintenant que l'on affaiblit la condition sur les nombres x dans la liste à $0 < x \leq 1$. Qu'est ce qui se passe si la liste contient exactement un 1?

5. Dans un triangle ABC , le cercle inscrit touche les côtés BC , CA et AB en D , E et F , respectivement. Soit Γ , Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 les cercles circonscrits aux triangles ABC , AEF , BDF et CDE respectivement. Soit A et P les points d'intersection de Γ et Γ_1 , B et Q les points d'intersection de Γ et Γ_2 , et C et R les points d'intersection de Γ et Γ_3 .

- (a) Démontrer que les cercles Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 s'intersectent en un point commun.
- (b) Démontrer que les segments PD , QE et RF sont concourants.