38e Olympiade mathématique du Canada

Mercredi le 29 mars, 2006

1. Soit $f(n,k)$ le nombre de façons de distribuer k biscuits à n enfants afin que chaque enfant reçoive au plus 2 biscuits. Par exemple, si $n=3$, alors $f(3,7)=0$, $f(3,6)=1$ et $f(3,4)=6$.

   Déterminer la valeur de

   $$f(2006,1)+f(2006,4)+f(2006,7)+\cdots+f(2006,1000)+f(2006,1003)\ .$$

2. Soit ABC un triangle acutangle (triangle dont les angles sont aigus). Inscrire un rectangle $DEFG$ dans ce triangle de sorte à ce que D se retrouve sur AB, E sur AC et F et G sur BC. Décrire le lieu des points d'intersection des diagonales de tous les rectangles $DEFG$ possibles (c'est-à-dire décrire la courbe occupée par ces points).

3. Dans un arrangement rectangulaire de nombres réels non négatifs à m lignes et n colonnes, chaque ligne et chaque colonne contient au moins un élément positif. De plus, si l'intersection d'une ligne et d'une colonne est un élément positif, alors la somme de leurs éléments est la même. Démontrer que $m=n$.

4. Considérer un tournoi composé de $2n+1$ équipes. Chaque équipe rencontre les autres équipes exactement une fois. On dit que trois équipes X, Y et Z forment un *triplet cyclique* si X défait Y, Y défait Z, et Z défait X. Il n'y a aucune égalité.

   (a) Déterminer le nombre minimum de triplets cycliques possibles.

   (b) Déterminer le nombre maximum de triplets cycliques possibles.

5. Les sommets d'un triangle rectangle ABC inscrit dans un cercle divisent la circonférence du cercle en trois arcs. L'angle droit du triangle est en A, l'arc opposé BC est ainsi un demi-cercle tandis que les arcs AB et AC sont supplémentaires. Pour chaque arc, on trace une tangente de sorte à ce que son point de tangence soit le point milieu du segment de droite défini par les intersections de la tangente avec l'extension des segments de droite AB et AC. Plus précisement, le point D sur l'arc BC est le point-milieu du segment de droite $D'D''$ où D' et D'' sont les intersections de la tangente à D avec les droites AB et AC, respectivement. De même pour le point E sur l'arc AC et pour F sur l'arc AB.

   Démontrer que le triangle DEF est équilatéral.