36ième Olympiade mathématique du Canada

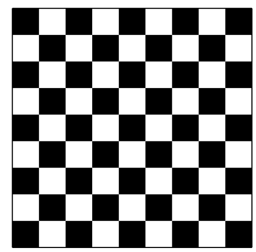
Mercredi, le 31 mars 2004

---

1. Déterminer tous les triplets ordonnés de nombres réels (x, y, z), satisfaisant le système d'équations qui suit:

$$\begin{cases} xy &= z - x - y \\ xz &= y - x - z \\ yz &= x - y - z \end{cases}$$

2. De combien de manières peut-on placer 8 tours non attaquantes sur un damier 9×9 (tel qu'illustré), de manière à ce que toutes ces 8 tours se retrouvent sur des carrés de la même couleur? [Deux tours sont dites attaquantes si elles se trouvent dans la même rangée ou dans le ême colonne du damier.]



3. Soient A, B, C et D quatre points sur un cercle (s'y retrouvant en sens horaire), tels que $AB < AD$ et $BC > CD$. La bissectrice de l'angle BAD rencontre le cercle en X; la bissectrice de l'angle BCD rencontre le cercle en Y. Considérer l'hexagone formé par ces six points sur le cercle. Montrer que si quatre des six côtés de cet hexagone ont longueurs égales, alors BD est un diamètre du cercle.

4. Soit p un entier premier impair. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} \equiv \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p^2}.$$

[Noter que $a \equiv b \pmod{m}$ signifie que $a - b$ est divisible par m.]

5. Soit T l'ensemble des diviseurs entiers positifs de 2004^{100}. Quel est la plus grande valeur possible pour le nombre d'éléments d'un sous-ensemble S de T, tel qu'aucun élément de S est un multiple entier d'un autre élément de S?