L'Olympiade mathématique du Canada - 2003

1. Considerons une horloge ordinaire (12 heures) comportant une aiguille des heures et une aiguille des minutes qui se déplacent de façon continue. Soit m un entier tel que $1 \leq m \leq 720$. A précisément m minutes après 12h00, l'angle entre les deux aiguilles est exactement $1°$. Déterminer toutes les valeurs possibles de m.

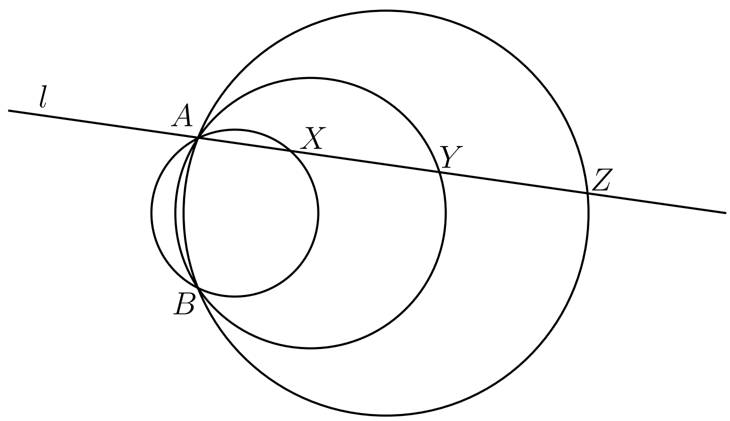
2. Trouver les trois derniers chiffres de $2003^{2002^{2001}}$.

3. Trouver toutes les solutions réelles positive (s'il y en a) à

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z, \text{ et}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz.$$

4. Démontrer que, lorsque trois cercles partagent une même corde AB, toute droite passant par A mais différente de AB détermine le même ratio $XY : YZ$, où X est un point arbitraire, distinct de B, situé sur le premier cercle, et où Y et Z sont les points où AX coupe les deux autres cercles, ces points étant étiquetés de façon à ce que Y soit entre X et Z.



5. Soit S un ensemble de n points dans le plan, tel que la distance entre tout couple de points de S soit d'au moins une unité. Démontrer qu'il existe un sous-ensemble T de S comportant au moins $n/7$ points et tel que la distance entre tout couple de points de T soit d'au moins $\sqrt{3}$ unités.