# l'Olympiade mathématique du Canada 2002

1. Soit $S$ un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, 9\}$ tel que les sommes de chacune des paires non-ordonnées d'éléments distincts de $S$ soient tous différentes. Par exemple, le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 5\}$ possède cette propriété, mais pas le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ puisque les paires $\{1, 4\}$ et $\{2, 3\}$ ont la même somme, soit 5.

   Quel est le nombre maximal d'éléments que $S$ peut contenir ?

2. Un entier positif $n$ est dit **pratique** si tout entier plus petit ou égal à $n$ peut s'écrire comme la somme de diviseurs distincts de $n$.

   Par exemple, les diviseurs de 6 sont **1**, **2**, **3** et **6** . Puisque

   1=**1**, 2=**2**, 3=**3**, 4=**1**+**3**, 5=**2**+ **3**, 6=**6**,

   on voit que 6 est pratique.

   Démontrer que le produit de deux nombres pratiques est également pratique.

3. Démontrer que pour tous nombres réels positifs $a$, $b$ et $c$,

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c,$$

   et déterminer les conditions pour lesquelles on a égalité.

4. Soit $\Gamma$ un cercle de rayon $r$. Soient $A$ et $B$ des points distincts sur $\Gamma$ avec $AB < \sqrt{3}r$. Supposons que le cercle de centre $B$ et de rayon $AB$ rencontre de nouveau $\Gamma$ en $C$. Supposons que $P$ soit le point à l'intérieur de $\Gamma$ pour lequel le triangle $ABP$ est équilatéral. Enfin, supposons que la droite $CP$ rencontre de nouveau $\Gamma$ au point $Q$.

   Démontrer que $PQ = r$.

5. Soit $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions $f : N \to N$ tel que

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2)$$

   pour tout $x$ et $y$ dans $N$.