l'Olympiade mathématique du Canada 2000

1. À midi (12 h 00), Anne, Beth et Carmen commencent à courir sur une piste d'athlétisme circulaire de trois cents mètres, en partant toutes trois du même point. Chaque coureuse maintient une vitesse constante dans l'une des deux directions possibles pendant une période indéterminée. Démontrer que si la vitesse d'Anne diffère de la vitesse des autres joggeuses, alors, Anne sera, à un certain moment, à au moins cent mètres de chacune des deux autres filles. (La distance se mesure ici le long du plus petit des deux arcs séparant deux coureuses.)

2. Une *permutation* des nombres entiers $1901, 1902, \ldots, 2000$ est une suite $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ dans laquelle chacun de ces nombres entiers apparaît exactement une fois. Pour chacune des permutations, on considère la suite des sommes partielles

$$s_1 = a_1, \;\; s_2 = a_1 + a_2, \;\; s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \; \ldots \; , \; s_{100} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}.$$

Parmi les permutations, combien auront la propriété que la somme partielle correspondante ne contient aucun multiple de 3?

3. Soit $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{2000})$ une suite de nombres entiers se trouvant tous dans l'intervalle $[-1000, 1000]$. Supposons que la somme des éléments de A est1. Démontrer qu'il existe un sous ensemble non vide de A dont la somme des éléments est nulle.

4. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dans lequel

$$\begin{aligned} \angle CBD &= 2\angle ADB, \\ \angle ABD &= 2\angle CDB \\ \text{et} \qquad AB &= CB. \end{aligned}$$

Démontrer que $AD = CD$.

5. Supposons que les nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ satisfont aux conditions suivantes

$$\begin{aligned} a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{100} &\geq 0, \\ a_1 + a_2 &\leq 100 \\ \text{et} \qquad a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} &\leq 100. \end{aligned}$$

Déterminer la valeur maximale possible de $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2$, et trouver toutes les suites possibles $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ pour lesquelles ce maximum est atteint.