l'Olympiade mathématique du Canada 1999

1. Trouver toutes les solutions réelles de l'équation $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$.

   Si x est un nombre réel, alors $[x]$ représente ici le plus grand entier plus petit ou égal à x.

2. Soit ABC un triangle équilatéral de hauteur 1. Un cercle de rayon 1 et de centre du même côté de AB que C roule le long du segment AB. Montrer que l'arc du cercle à l'intérieur du triangle a toujours la même longueur.

3. Trouver tous les nombres entiers positifs n ayant la propriété que $n = (d(n))^2$. On représente ici par $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

4. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_8$ des nombres entiers distincts tous pris de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 16, 17\}$. Montrer qu'il existe un nombre entier $k > 0$ de sorte que l'équation $a_i - a_j = k$ ait au moins trois solutions différentes. De plus, trouver un ensemble spécifique de 7 entiers distincts tous pris de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 16, 17\}$ de sorte que l'équation $a_i - a_j = k$ ne comporte pas trois solutions différentes pour tout $k > 0$.

5. Soient x, y, et z des nombres réels non négatifs satisfaisant $x + y + z = 1$. Montrer que
$$x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27},$$
   et décrire les cas d'égalité.