l'Olympiade mathématique du Canada 1998

1. Déterminer le nombre de solutions réelles a de l'équation

$$\left[\frac{1}{2}\,a\right]+\left[\frac{1}{3}\,a\right]+\left[\frac{1}{5}\,a\right]=a\ .$$

Ici, si x est un nombre réel quelconque, on a dénoté par $[\,x\,]$ le plus grand entier plus petit ou égal à x.

2. Trouver tous les nombres réels x tels que

$$x=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{1/2}+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/2}.$$

3. Soit n un nombre naturel tel que $n \geq 2$. Montrer que

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

4. Soit ABC un triangle donné dont $\angle BAC = 40°$ et $\angle ABC = 60°$. Soit maintenant D et E les points sur les côtés AC et AB, respectivement, tels que $\angle CBD = 40°$ et $\angle BCE = 70°$. Soit de plus F le point d'intersection des droites BD et CE. Montrer alors que la droite AF est perpendiculaire à la droite BC.

5. Soit m un entier positif. Nous définissons une suite $a_0, a_1, a_2, \ldots$ en posant $a_0 = 0$, $a_1 = m$, et plus généralement par $a_{n+1} = m^2 a_n - a_{n-1}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. Montrer qu'un couple ordonné (a, b) d'entiers non négatifs, avec $a \leq b$, constitue une solution de l'équation

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=m^2$$

si et seulement si (a, b) est de la forme (a_n, a_{n+1}) pour une valeur $n \geq 0$ quelconque.