Olympiade mathématique du Canada
1996

PROBLÈME 1

Si α, β, γ sont les racines de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$, alors calculer

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

PROBLÈME 2

Trouver toutes les solutions réelles du système d'équations suivant. Justifier soigneusement votre réponse.

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$$

PROBLÈME 3

On dénote une permutation quelconque des entiers $1, \ldots, n$ par $a_1, \ldots, a_n$. Posons maintenant $f(n)$ comme étant le nombre de telles permutations ayant les propriétés suivantes:
(i) $a_1 = 1$;
(ii) $|a_i - a_{i+1}| \leq 2, \quad i = 1, \ldots, n-1$.
Déterminer si $f(1996)$ est divisible par 3.

PROBLÈME 4

Soit $\triangle ABC$ un triangle isocèle tel que $AB = AC$. Supposons de plus que l'angle bissecteur de $\angle B$ rejoigne AC en D et que $BC = BD + AD$. Déterminer alors $\angle A$.

PROBLÈME 5

Soit $r_1, r_2, \ldots, r_m$ un ensemble donné de m nombres rationnels positifs tels que $\sum_{k=1}^{m} r_k = 1$. On définit maintenant la fonction f par $f(n) = n - \sum_{k=1}^{m} [r_k n]$ pour chaque entier positif n. Déterminer la valeur minimum et la valeur maximum de $f(n)$. On dénote ici par $[x]$ le plus grand entier plus petit ou égal à x.