Olympiade mathématique du Canada
1995

Problème 1

Soit $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$. Evaluer la somme

$$f(\frac{1}{1996}) + f(\frac{2}{1996}) + f(\frac{3}{1996}) + \cdots + f(\frac{1995}{1996}).$$

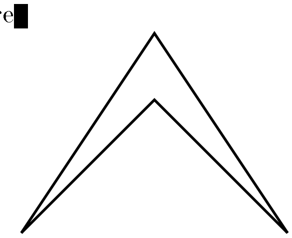
Problème 2

Soient a, b, et c des nombres réels positifs. Montrer que

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Problème 3

Définissons un boomerang comme étant un quadrilatère dont les côtés opposés ne se coupent pas et dont un des angles internes est supérieur à 180 degrés. (Voir la figure ci-contre.) Soit maintenant C un polygone convexe à s côtés. Supposons de plus que l'intérieur de C soit l'union de q quadrilatères dont leurs intérieurs ne se chevauchent pas deux à deux. Montrer que si b de ces quadrilatères sont des boomerangs, alors $q \geq b + \frac{s-2}{2}$.



Problème 4

Soit n un entier positif fixe. Montrer que seulement pour des entiers non négatifs k, l'équation diophantine

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = y^{3k+2}$$

possède une infinité de solutions dont x_i et y soient entiers positifs.

Problème 5

Soit u un paramètre réel tel que $0 < u < 1$. Posons

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq u \\ 1 - \left(\sqrt{ux} + \sqrt{(1-u)(1-x)}\right)^2 & \text{si } u \leq x \leq 1 \end{cases}$$

et définissons de plus la suite $\{u_n\}$ récursivement comme suit:

$$u_1 = f(1), \text{ et } u_n = f(u_{n-1}) \text{ pour tout } n > 1.$$

Montrer qu'il existe toujour un entier positif k tel que $u_k = 0$.