

Olympiade mathématique du Canada 1992

PROBLÈME 1

Montrer que le produit des n premiers entiers positifs est divisible par la somme des n premiers entiers positifs si et seulement si $n + 1$ n'est pas un nombre premier impair.

PROBLÈME 2

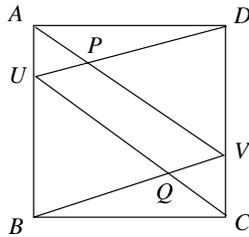
Pour $x, y, z \geq 0$, établir l'inégalité

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z)$$

et déterminer les valeurs pour lesquelles il y a égalité.

PROBLÈME 3

Sur le diagramme ci-dessous, $ABCD$ est un carré sur lequel on choisit des points U et V intérieurs aux côtés AB et CD respectivement. Déterminer toutes les façons possibles de choisir U et V de telle sorte que la surface du quadrilatère $PUQV$ soit maximale.



PROBLÈME 4

Résoudre l'équation

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3.$$

PROBLÈME 5

Un jeu de $2n + 1$ cartes contient un joker et, pour chaque nombre entier de 1 à n inclusivement, 2 cartes marquées de ce numéro. Les $2n + 1$ cartes sont alors alignées avec le joker au milieu. De plus, pour chaque nombre entier k avec $1 \leq k \leq n$, les deux cartes numérotées k ont exactement $k - 1$ autres cartes entre elles. Trouver toutes les valeurs de n ne dépassant pas 10 pour lesquelles cet arrangement soit possible. Maintenant, pour quelles valeurs de n est-ce impossible?