Olympiade mathématique du Canada
1990

Problème 1

Un nombre $n \geq 2$ de joueurs participent à un tournoi qui dure k jours. À chaque jour, les joueurs gagnent $1, 2, 3, \ldots$, ou n points, et les scores des divers joueurs sont tous distincts pour la journée. À la fin du tournoi, après k jours, les joueurs avaient accumulé chacun 26 points. Déterminer tous les couples (n, k) pour lesquels une telle situation est possible.

Problème 2

On dispose au hasard un ensemble de $\frac{1}{2}n(n+1)$ nombres distincts dans un arrangement triangulaire comme suit:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \times & & & & \\
 & & & \times & & \times & & & \\
 & & \times & & \times & & \times & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\times & \times & \cdot & & \cdot & & \cdot & \times & \times
\end{array}$$

Soit M_k le plus grand des nombres de la $k^{\text{ième}}$ ligne à partir du haut. Calculer la probabilité que

$$M_1 < M_2 < M_3 < \cdots < M_n.$$

Problème 3

Soit $ABCD$, un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, et soit X, l'intersection des diagonales AC et BD. Les perpendiculaires abaissées de X sur chacun des côtés rencontrent les côtés AB, BC, CD, et DA respectivement aux points A', B', C' et D'. Démontrer que

$$|A'B'| + |C'D'| = |A'D'| + |B'C'|.$$

($|A'B'|$ est la longueur du segment $A'B'$, *etc.*).

Problème 4

Une particule peut se déplacer jusqu'à 2 mètres à la seconde le long de l'axe des x, et jusqu'à 1 mètre à la seconde ailleurs dans le plan. Faire un graphique de la région qui peut être atteinte en une seconde par une particule partant de l'origine, en identifiant bien les diverses parties du graphique.

Problème 5

Soit f, une fonction définie sur les entiers positifs telle que

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2,$$
$$f(n+2) = f\big(n + 2 - f(n+1)\big) + f\big(n + 1 - f(n)\big) \quad (n \geq 1).$$

(a) Montrer que

(i) $0 \leq f(n+1) - f(n) \leq 1$.

(ii) Si $f(n)$ est impair, alors $f(n+1) = f(n) + 1$.

(b) Déterminer, avec preuve à l'appui, toutes les valeurs de n telles que

$$f(n) = 2^{10} + 1.$$