

Olympiade mathématique du Canada

1989

PROBLÈME 1

On place les entiers $1, 2, \dots, n$ dans un ordre tel que chaque nombre soit ou bien strictement plus grand que tous les nombres qui le précèdent, ou bien strictement plus petit que tous les nombres qui le précèdent. De combien de façons peut-on procéder à un tel arrangement?

PROBLÈME 2

Soit ABC un triangle rectangle d'aire égale à 1. A', B', C' sont respectivement les points symétriques de A, B, C . Trouver l'aire du triangle $\triangle A'B'C'$.

PROBLÈME 3

Définissons $\{A_n\}_{n=1}$ comme suit: $a_1 = 1989^{1989}$; $a_n, n > 1$, est la somme de chiffres de a_{n-1} . Quelle est la valeur de a_5 ?

PROBLÈME 4

Il y a 5 singes, 5 échelles, et une banane au haut de chaque échelle. Des cordes relient les échelles: chaque corde relie exactement deux échelles, et deux cordes ne sont jamais attachées au même barreau d'une échelle. Au début, les 5 singes sont au pied des 5 échelles. Ils se mettent à grimper, mais aussitôt arrivés à une corde, ils la suivent jusqu'au bout et continuent à grimper dans l'autre échelle. Montrer que quel que soit le nombre de cordes, chaque singe obtiendra une banane.

PROBLÈME 5

Considérons les nombres $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$. Si $\sigma = X_1, X_2, \dots, X_n$ est une permutation de ces nombres, on définit $S_1(\sigma) = X_1$, $S_2(\sigma) = X_1 + X_2$, $S_3(\sigma) = X_1 + X_2 + X_3, \dots$ et $Q(\sigma) = S_1(\sigma)S_2(\sigma) \cdots S_n(\sigma)$. Évaluer $\sum 1/Q(\sigma)$ où on prend la somme sur toutes les permutations possibles. ■