Olympiade mathématique du Canada 1985

PROBLÈME 1

Les dimensions des côtés d'un triangle sont 6, 8 et 10 unités. Démontrer qu'il existe une et une seule ligne droite qui divise en deux simultanément l'aire et le périmètre de ce triangle.

PROBLÈME 2

Existe-t-il un entier qui est doublé quand on transfère son premier chiffre à la fin?

PROBLÈME 3

Soient P_1 et P_2 deux polygones réguliers de 1985 côtés chacun, dont les périmètres sont respectivement x et y. Chaque côté de P_1 est tangent à un cercle donné de circonférence c et chaque sommet de P_2 se trouve sur ce cercle. Montrer que $x + y \geq 2c$. (Indication: vous pouvez utiliser, sans la prouver, l'inégalité $\tan\theta \geq \theta$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$).

PROBLÈME 4

Montrer que 2^{n-1} divise $n!$ si et seulement si $n = 2^{k-1}$ pour un certain entier naturel k.

PROBLÈME 5

Soit x_1 tel que $1 < x_1 < 2$. Pour $n = 1, 2, \ldots$, on définit

$$x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2.$$

Montrer que, pour $n \geq 3$, on a

$$\left|x_n - \sqrt{2}\right| < 2^{-n}.$$