Olympiade mathématique du Canada
1981

Problème 1

Pour chaque nombre réel t, nous désignons par $[t]$ le plus grand entier qui soit plus petit ou égal à t. Par exemple: $[8] = 8$, $[\pi] = 3$ et $[-5/2] = -3$. Montrer que l'équation

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$$

n'a pas de solution réelle.

Problème 2

Étant donné un cercle de rayon r avec la tangente ℓ à un point fixé P sur le cercle. D'un point variable R sur le cercle, on trace la perpendiculaire RQ touchant ℓ au point Q. (Q est donc le pied de la perpendiculaire et un point sur ℓ). Déterminer le maximum de l'aire du triangle PQR.

Problème 3

Étant donné un ensemble fini de droites dans le plan P, montrer qu'il est possible de tracer un cercle dans P, de rayon r aussi grand qu'on veut, qui ne rencontre aucune droite. Par contre, montrer qu'il est possible d'arranger une suite infinie de droites (première droite, seconde droite, troisième droite, *etc.*) dans P de telle façon que chaque cercle dans P recontre au moins une de ces droites. (Un point ne constitue pas un cercle).

Problème 4

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes qui satisfont à l'identité $P\big(Q(x)\big) \equiv Q\big(P(x)\big)$ pour tous x réels. Si l'equation $P(x) = Q(x)$ n'a pas de solution réelle, montrer que l'équation $P\big(P(x)\big) = Q\big(Q(x)\big)$ également n'a pas de solution réelle.

Problème 5

Onze troupes de théâtres prennent part à un festival d'art dramatique. Chaque jour quelques troupes donnent des représentations tandis que les autres troupes qui ne donnent pas des représentations sont parmi les spectateurs. Pour que chaque troupe voie au moins une des représentations données par chacune des autres troupes, que doit être la durée minimum du festival?