Olympiade mathématique du Canada
1978

PROBLÈME 1

Soit n un entier. Si le chiffre des dizaines dans le nombre n^2 est 7, quel est le chiffre des unités dans n^2?

PROBLÈME 2

Trouver toutes les paires a, b d'entiers positifs telles que $2a^2 = 3b^3$.

PROBLÈME 3

Déterminer le nombre réel z le plus grand tel que

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ xy + yz + xz &= 3 \end{aligned}$$

et tel que x et y soient réels eux aussi.

PROBLÈME 4

On prolonge les côtés AD et BC d'un quadrilatère convexe $ABCD$ jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point E. Soient H et G les points milieux des centres des côtés BD et AC, respectivement. Trouver le rapport de l'aire du triangle EHG à l'aire du quadrilatère $ABCD$.

PROBLÈME 5

Eve et Odette jouent sur un damier 3×3 et avec des dames noires et des dames blanches un jeu dont les règles sont les suivantes.

I. Elles jouent un coup à tour de rôle.
II. Un coup consiste à déposer une dame dans une case inoccupée du damier.
III. Chacune est libre, à chaque tour, de déposer une dame noire ou une dame blanche.
IV. Quand le damier est rempli, Eve gagne un point pour chaque ligne, colonne ou diagonale qui comprend un nombre pair de dames noires et Odette gagne un point pour chaque ligne, colonne ou diagonale qui a un nombre impair de dames noires.
V. Si l'une des deux remporte au moins cinq des huit points, c'est elle qui gagne la partie.

(a) Peut-on avoir une partie nulle 4–4? Expliquer.
(b) Décrire une stratégie gagnante pour celle qui est la première à jouer.

PROBLÈME 6

Dessiner le graphe de l'équation $x^3 + xy + y^3 = 3$.