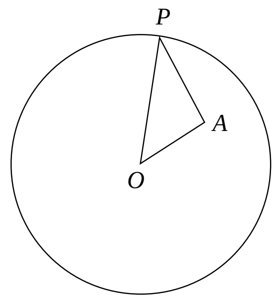
Olympiade mathématique du Canada
1977

PROBLÈME 1

Si $f(x) = x^2 + x$, montrer que l'équation $4f(a) = f(b)$ ne possède aucune solution dont les nombres a et b sont tous deux entiers positifs.

PROBLÈME 2

Soit O le centre d'un cercle et A un point intérieur fixe du cercle mais différent de O. Déterminer alors tous les points P sur la circonférence du cercle tels que l'angle OPA soit maximum.



PROBLÈME 3

Si N est un nombre entier dont la représentation dans la base b est 777, trouver alors le plus petit entier b pour lequel N est la quatrième puissance d'un entier.

PROBLÈME 4

Soient

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

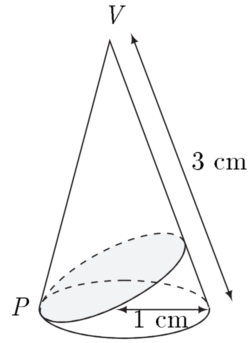
et

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

deux polynômes dont les coéfficients sont entiers. Supposons de plus que les coéfficients du produit $p(x) \cdot q(x)$ soient pairs mais pas tous divisibles par 4. Montrer alors que $p(x)$ ou sinon $q(x)$ a tous ses coéfficients pairs et que l'autre a au moins un de ses coéfficients impair.

PROBLÈME 5

Un cône circulaire droit de rayon de base 1 cm et d'inclinaison 3 cm est donné. P est de plus un point sur la circonférence de la base et le plus court trajet de P autour du cône et de retour en P est tracée (voir le diagramme). Quel est donc la distance minimum du sommet V à ce trajet?



PROBLÈME 6

Soit $0 < u < 1$ et définissons

$$u_1 = 1 + u, \quad u_2 = \frac{1}{u_1} + u, \quad \ldots, \quad u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + u, \quad n \geq 1.$$

Montrer que $u_n > 1$ pour toutes valeurs de $n = 1, 2, 3, \ldots$.

PROBLÈME 7

Une ville rectangulaire est composée d'exactement m pâtés de maisons de long et n pâtés de maisons de large (voir le diagramme). Une femme demeure dans le coin sud-ouest de la ville et travaille dans le coin nord-est. Elle marche au travail chaque jour mais, chaque fois, elle s'assure que son chemin ne croise toute intersection plus d'une fois. Montrer que le nombre $f(m, n)$ de différents chemins possibles satisfait $f(m, n) \leq 2^{mn}$.