Olympiade mathématique du Canada
1976

PROBLÈME 1

Etant donnés quatre poids formant une progression géométrique et une balance à bras égaux, montrer comment trouver le poids le plus lourd en se servant de la balance deux fois au plus.

PROBLÈME 2

Supposons que
$$n(n+1)a_{n+1} = n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-1}$$
pour tout nombre entier positif $n \geq 1$.
Si de plus $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, trouver
$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{50}}{a_{51}}.$$

PROBLÈME 3

Deux étudiants de 7° année ont obtenus l'autorisation de prendre part à un tournoi d'échecs réservé habituellement aux étudiants de 8° année. Chaque participant joue une fois contre chaque autre joueur et reçoit un point pour une victoire, un demi point pour une partie nulle et aucun point pour une perte. Les deux joueurs de 7° année ont amassées ensemble un total de huit points et tous les joueurs de 8° année ont remportés le même nombre de points. Combien alors y avait-il de joueurs de 8° année présents au tournoi? Est-ce une solution unique?

PROBLÈME 4

Soit AB le diamètre d'un cercle, C un point quelconque entre A et B sur ce diamètre, et Q un point variable sur la circonférence du cercle. Soit maintenant P le point sur la droite déterminée par Q et C pour lequel $\frac{AC}{CB} = \frac{QC}{CP}$. Décrire, avec démonstration, le lieu géométrique du point P.

PROBLÈME 5

Montrer qu'un nombre entier positif est la somme d'au moins deux entiers positifs successifs si et seulement s'il n'est pas une puissance de deux.

PROBLÈME 6

Si A, B, C, D sont quatre points dans l'espace, tels que
$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = \pi/2,$$
montrer que A, B, C, D se situent tous dans un même plan.

Problème 7

Soit $P(x, y)$ un polynôme à deux variables x, y tel que $P(x, y) = P(y, x)$ pour tout x, y (par example, le polynôme $x^2 - 2xy + y^2$ satisfait ces hypothèses). Etant donné de plus que $(x - y)$ soit un facteur de $P(x, y)$, montrer que $(x - y)^2$ est également un facteur de $P(x, y)$.

Problème 8

Chacun des 36 segments de droite joignant 9 points distincts d'un cercle donné est coloré rouge ou bleu. Supposons maintenant que tout triangle formé de trois des 9 points donnés contient au moins un côté de couleur rouge. Montrer alors qu'il existe quatre points dont les 6 segments les rejoignant un à l'autre soient tous rouges.