Olympiade mathématique du Canada
1975

Problème 1

Simplifier l'expression suivante:

$$\left(\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+\cdots+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+\cdots+n\cdot 3n\cdot 9n}\right)^{1/3}.$$

Problème 2

Une suite de nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisfait
(i) $a_1 = \frac{1}{2}$,
(ii) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n \quad (n \geq 1)$.
Déterminer les valeurs des $a_n \quad (n \geq 1)$.

Problème 3

Pour chaque nombre réel r on dénote par $[r]$ le plus grand entier plus petit ou égal à r, *p.ex.*, $[6] = 6$, $[\pi] = 3$, $[-1.5] = -2$. Indiquer sur le plan (x, y) l'ensemble des points (x, y) pour lesquels $[x]^2 + [y]^2 = 4$.

Problème 4

Pour un nombre positif tel que 3.27, le nombre 3 est appelé sa partie entière. et .27 sa partie décimale. Trouver un nombre positif tel que sa partie décimale, sa partie entière et le nombre lui-même forment une progression géometrique.

Problème 5

A, B, C, D étant quatre points "consécutifs" sur la circonférence d'un cercle et P, Q, R, S étant respectivement les points milieux des arcs AB, BC, CD, DA sur la circonférence du cercle, montrer que PR est perpendiculaire à QS.

Problème 6

(i) 15 chaises sont placées autours d'une table ronde sur laquelle on a posé des cartes pour 15 invités. Ces hôtes n'ont pourtant pas remarqués les cartes avant qu'ils soient tous assis, et malheureusement aucun ne se trouve assis au bon endroit. Montrer pourtant qu'il est possible de tourner la table afin qu'au moins deux des invités soient simultanément assis au bon endroit.

(ii) Donner un arrangement autour de la table pour lequel un des 15 invités soit correctement assis mais dont aucune rotation ne produise plus d'une des personnes assises au bon endroit.

Problème 7

Une fonction $f(x)$ est dite *périodique* s'il existe un nombre positif p tel que $f(x+p) = f(x)$ pour tout x. Par example, $\sin x$ est périodique de période 2π. La fonction $\sin(x^2)$ est-elle pourtant périodique? Démontrer votre énoncé.

PROBLÈME 8

Soit k un nombre entier positif. Trouver tous les polynômes

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

dont les coéfficients a_i sont réels, et qui satisfassent l'équation

$$P\bigl(P(x)\bigr) = \{P(x)\}^k.$$