Olympiade mathématique du Canada
1974

PARTIE A

PROBLÈME 1

i) Si $x = (1 + \frac{1}{n})^n$ et $y = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, montrer que $y^x = x^y$.
ii) Montrer que, pour tout entier positif n,

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^n(n-1)^2 + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}(1 + 2 + \cdots + n).$$

PROBLÈME 2

Soit $ABCD$ un rectangle dont $BC = 3AB$. Montrer que si P, Q sont les points sur le côté BC pour lesquels $BP = PQ = QC$, alors

$$\angle DBC + \angle DPC = \angle DQC.$$

PARTIE B

PROBLÈME 3

Soit

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

un polynôme dont les coéfficients satisfont les conditions:

$$0 \leq a_i \leq a_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Posons $b_0, b_1, \ldots, b_{2n}$ les coéfficients du polynôme

$$\begin{aligned}\big(f(x)\big)^2 &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)^2 \\ &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_{2n}x^{2n}.\end{aligned}$$

Montrer que

$$b_{n+1} \leq \frac{1}{2}\big(f(1)\big)^2.$$

PROBLÈME 4

Soit n un nombre entier quelconque. A tout choix de n nombres réels satisfaisant

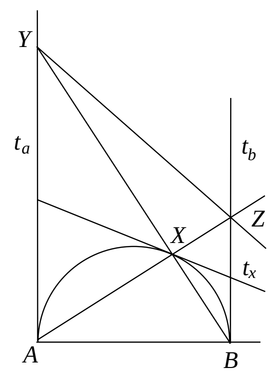
$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

on fait correspondre la somme
(∗)
$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j| &= |x_1-x_2|+|x_1-x_3|+|x_1-x_4|+\cdots+|x_1-x_{n-1}|+|x_1-x_n|\\ &\quad+|x_2-x_3|+|x_2-x_4|+\cdots+|x_2-x_{n-1}|+|x_2-x_n|\\ &\quad+|x_3-x_4|+\cdots+|x_3-x_{n-1}|+|x_3-x_n|\\ &\quad+\cdots+|x_{n-2}-x_{n-1}|+|x_{n-2}-x_n|\\ &\quad+|x_{n-1}-x_n|.\end{aligned}$$

Posons $S(n)$ la plus grande des valeurs de la somme $(*)$. Trouver $S(n)$.

Problème 5

Etant donné un cercle de diamètre AB et un point X sur le cercle mais différent de A et B, on dénote par t_a, t_b et t_x les tangentes au cercle en A, B et X respectivement. Soit de plus Z le point où la droite AX rencontre t_b et Y le point où la droite BX rencontre t_a. Montrer que les trois droites YZ, t_x et AB sont ou bien concourantes (*c.-à-d.*, elles passent toutes par le même point) ou sont alors parallèles.

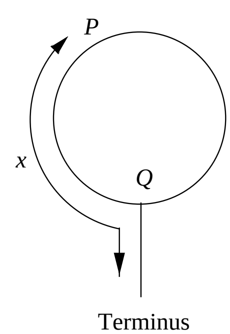


Problème 6

Un inventaire sans limite de timbres de 8 et 15 sous nous est disponible. Certaines valeurs de timbres ne peuvent pas être exactement obtenues, *p.ex.*, 7 sous, 29 sous. Quelle est la plus grande valeur qui ne puisse être obtenue, *c.-à-d.*, la valeur de timbre, disons n, qui n'est pas obtenable mais dont toutes les valeures supérieures à n soient par contre obtenable? (Justifier votre réponse.)

Problème 7

Une ligne d'autobus consiste en une route circulaire de circonférence 10 milles et une route droite de longueur 1 mille qui provient du terminus jusqu'au point Q sur la route circulaire (voir le diagramme). Deux autobus sont sur la même ligne, chacune nécessitant 20 minutes pour faire le trajet aller retour. En partant du terminus, l'autobus no. 1 parcoure la route droite, puis contourne le cercle une fois dans le sens des aiguilles d'une montre et finalement reprend la route droite jusqu'au terminus. L'autobus no. 2 parcoure un trajet semblable mais contourne le cercle dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et rejoint le terminus 10 minutes après l'autobus



no. 1. Les deux autobus parcourent de plus leur trajet sans interruption sinon pour un temps négligeable lors de l'embarquement et débarquement des passagers.
Un individu qui se situe au point P à x milles $(0 \leq x < 12)$ du terminus par la route de l'autobus no. 1 se propose de se rendre au terminus par l'une des autobus. Si on suppose bien sûr que cet individu choisira l'autobus qui l'apportera au terminus dans le temps le plus court, il y a nécessairement un temps maximum $w(x)$ que ce voyage (le temps d'attente en plus du trajet) prendra.
Trouver $w(2)$; trouver $w(4)$.
Pour quelle valeur de x ce temps $w(x)$ sera-t-il le plus long?
Tracer le graphe de $y = w(x)$ pour $0 \leq x < 12$.