# Olympiade mathématique du Canada
# 1973

PROBLÈME 1

(i) Résoudre les inégalités simultanées, $x < \frac{1}{4x}$ et $x < 0$; *c.-à-d.*, trouver une seule inégalité équivalente aux deux données.

(ii) Quel est le plus grand nombre entier qui satisfasse les deux inégalités $4x+13 < 0$ et $x^2 + 3x > 16$?

(iii) Trouver un nombre rationel compris entre 11/24 et 6/13.

(iv) Exprimer 100000 comme un produit de deux entiers dont ni l'un ni l'autre ne soit un multiple de 10.

(v) Sans l'aide de tables logarithmiques, évaluer

$$\frac{1}{\log_2 36} + \frac{1}{\log_3 36}.$$

PROBLÈME 2

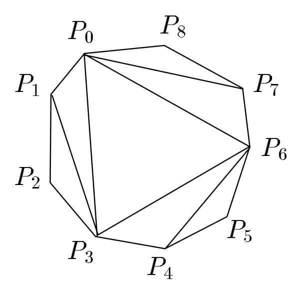
Trouver tous les nombres réels qui satisfont l'équation $|x+3| - |x-1| = x+1$. (Remarque: $|a| = a$ si $a \geq 0$; $|a| = -a$ si $a < 0$.)

PROBLÈME 3

Montrer que si $p$ et $p+2$ sont tous deux des nombres premiers supérieurs à 3, alors 6 est un facteur de $p+1$.

PROBLÈME 4

Le dessin ci-contre nous montre un polygone (convexe) muni de neuf sommets. Les six diagonales qui ont été tracées découpent notre polygone en sept triangles: $P_0P_1P_3$, $P_0P_3P_6$, $P_0P_6P_7$, $P_0P_7P_8$, $P_1P_2P_3$, $P_3P_4P_6$, $P_4P_5P_6$. Combie n puisse-t'on trouver de façons de désigner ces triangles sous les noms de $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$, $\triangle_5$, $\triangle_6$, $\triangle_7$ de sorte que $P_i$ soit un sommet du triangle $\triangle_i$ pour chaque $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$? Justifier votre réponse.




PROBLÈME 5

Pour chaque nombre entier positif $n$, soit

$$h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Par example, $h(1) = 1$, $h(2) = 1 + \frac{1}{2}$, $h(3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Montrer que pour $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$n + h(1) + h(2) + h(3) + \cdots + h(n-1) = nh(n).$$

## PROBLÈME 6

Si $A$ et $B$ sont des points fixes sur un cercle donné non colinéaires avec le centre $O$ du cercle, et si de plus $XY$ est un diamètre variable, trouver le lieu géométrique des points $P$ (l'intersection de la droite par $A$ et $X$ et la droite par $B$ et $Y$).

## PROBLÈME 7

Observer que

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}; \quad \frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}; \quad \frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}.$$

Enoncer maintenant une régle générale suggérée par ces examples, et démontrer-là. Montrer que pour chaque nombre entier $n$ supérieur à 1 il existe d'autres entiers $i$ et $j$ de telle sorte que

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\frac{1}{(i+2)(i+3)}+\cdots+\frac{1}{j(j+1)}.$$