Olympiade mathématique du Canada
1972

PROBLÈME 1

Etant donnés trois cercles de rayon unité, chacun tangent aux deux autres, trouver le rayon des cercles tangents aux trois cercles donnés.

PROBLÈME 2

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels non-négatifs. Posons M la somme de tous les produits des couples $a_i a_j$ $(i < j)$, *c.-à-d.*,

$$M = a_1(a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + a_2(a_3 + a_4 + \cdots + a_n) + \cdots + a_{n-1}a_n.$$

Montrer que le carré d'au moins un des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne dépasse pas $2M/n(n-1)$.

PROBLÈME 3

a) Montrer que 10201 est un nombre composé pour toute base plus grande que 2.
b) Montrer que 10101 est un nombre composé pour toute base.

PROBLÈME 4

Décrire la construction d'un quadrilatère $ABCD$ étant donnés:
(i) les longueurs des quatre côtés;
(ii) que AB et CD soient parallèles;
(iii) que BC et DA ne se coupent pas.

PROBLÈME 5

Montrer qu'il n'existe pas d'entiers x et y qui soient solutions de l'équation $x^3 + 11^3 = y^3$.

PROBLÈME 6

Soient a et b des nombres réels distincts. Montrer qu'il existe des nombres entiers m et n tels que $am + bn < 0$, $bm + an > 0$.

PROBLÈME 7

a) Montrer que les valeurs de x pour lesquelles $x = (x^2 + 1)/198$ se situent entre $1/198$ et $197.99494949\cdots$.
b) Utiliser le résultat de a) pour montrer que $\sqrt{2} < 1.41\overline{421356}$.
c) Est-il vrai que $\sqrt{2} < 1.41421356$?

PROBLÈME 8

Durant une certaine campagne électorale, p différentes sortes de promesses ont été faites par les divers partis concernés $(p > 0)$. Bien que plusieurs partis puissent faire la même promesse, deux partis quelconques ont au moins une promesse en commun; de plus, deux partis distincts diffèrent par au moins une promesse. Montrer que la campagne comporte au plus 2^{p-1} partis.

Problème 9

Quatre droites distinctes L_1, L_2, L_3, L_4 sont données dans le plan. L_1 et L_2 sont respectivement parallèles à L_3 et L_4. Trouver le lieu géométrique du point se déplaçant de telle sorte que la somme de ses distances perpendiculaires aux quatres droites soit constante.

Problème 10

Quel est le nombre maximum de termes d'une progression géométrique ayant un rapport commun plus grand que 1 et de plus qui soit composés des chiffres entre 100 et 1000 inclusivement?